Propiedad 1

Si una sucesión de números reales es convergente, está acotada.

Demostración

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales con límite L.

Por la definición de límite, como $1>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n>n_0 \Rightarrow a_n \in (L-1,L+1)$.

El mayor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L+1$ es una cota superior.

El menor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, L-1$ es una cota inferior.

Por tanto, la sucesión está acotada.

Propiedad 2

$\lim a_n = L \Rightarrow \lim (-a_n) = -L$

Demostración

Sea ε un número real positivo.

$\lim a_n = L \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n>n_0 \Rightarrow a_n \in (L-\varepsilon,L+\varepsilon) \Rightarrow -a_n \in (-L-\varepsilon,-L+\varepsilon) \Rightarrow \lim (-a_n) = -L$

Para entender la deducción principal de este razonamiento puedes usar este ejemplo: $3{,}25 \in (3-0{,}5;3+0{,}5) \Rightarrow -3{,}25 \in (-3-0{,}5;-3+0{,}5)$.

Propiedad 3

Si una sucesión de números reales es creciente y está acotada superiormente, es convergente.

Demostración

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales.

Como está acotada superiormente, existe una cota superior que es la menor de todas las cotas superiores. Llamémosla «L» y vamos a demostrar que $\lim a_n = L$.

Elegimos un número real ε positivo.

Debe existir un número natural n_0 que verifique que $L-\varepsilon < a_{n_0} \leqslant L$, porque si no existiera, $L-\varepsilon$ sería una cota superior de la sucesión que sería menor que L.

Como $\{a_n\}$ es creciente, $n>n_0 \Rightarrow a_n > a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0} < a_n \Rightarrow L-\varepsilon < a_n \leqslant L \Rightarrow a_n \in (L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.

Propiedad 4

Si una sucesión de números reales es decreciente y está acotada inferiormente, es convergente.

Demostración

Se puede demostrar esta propiedad de dos maneras diferentes.

Primera demostración

Usando un razonamiento muy similar al de la demostración de la propiedad 3.

Segunda demostración

Si la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y está acotada inferiormente, la sucesión $\{-a_n\}$ es creciente y está acotada superiormente.

Por la propiedad 2, la sucesión $\{-a_n\}$ es convergente, luego tiene límite. Llamamos $\lim (-a_n) = L$. Por la propiedad 2, $\lim (a_n) = -L$, luego la sucesión $\{a_n\}$ es convergente.

 Licencia: CC0 1.0 Universal