¿Cuántos límites puede tener una sucesión?

La idea intuitiva del límite de una sucesión nos invita a pensar que, si tiene alguno, solo puede tener uno: si los términos de una sucesión se «apelotonan» en un lugar, no puede ser que se apelotonen también en otro.

De acuerdo, pero, ¿qué pensamos de esta sucesión?:

$$b_n = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ 5 & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases} ; \; b \to 3, 5, 3, 5, 3, 5, \ldots$$

O de esta:

$$c_n = \begin{cases} 3+\frac{1}{n} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ 5+\frac{1}{n} & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases} ; \; c \to 4;\ 5{,}5;\ 3{,}\overline{3};\ 5{,}25;\ 3{,}2;\ 5{,}1\overline{6};\ \ldots$$

¿Puede ser que tengan dos límites, 3 y 5? Al fin y al cabo, los términos de las sucesiones se apelotonan en el 3 y en el 5.

Pues no, estas sucesiones no tienen límite. Y para estar seguros, usamos la definición de límite finito y preparamos una demostración rigurosa.

Propiedad

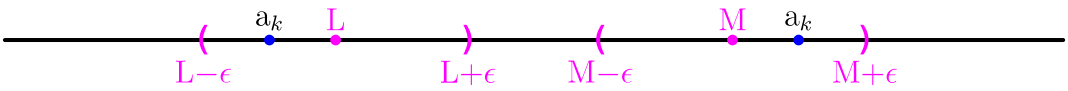
Si una sucesión de números reales tiene límite, el límite es único.

Demostración

Vamos a hacer la demostración por reducción al absurdo. Supondremos que existe una sucesión que tiene dos límites y llegaremos a una contradicción.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales que tiene dos límites, los números reales L y M, distintos. Se verifica $\lim a_n = L$ y $\lim a_n = M$.

Para aplicarle a los dos límites la definición, elegimos un valor de ε de tal manera que los intervalos $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ y $(M-\varepsilon,M+\varepsilon)$ no tengan ningún número en común, es decir, que $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)\cap(M-\varepsilon,M+\varepsilon)=\varnothing$. De entre las muchas opciones que tenemos, elegimos $\varepsilon = |L-M|/3$; es decir, un tercio de la distancia entre L y M:



$\lim a_n = L \Rightarrow \exists n_L \in \mathbb{N} \mid n > n_L \Rightarrow a_n \in (L-\varepsilon,L+\varepsilon)$

$\lim a_n = M \Rightarrow \exists n_M \in \mathbb{N} \mid n > n_M \Rightarrow a_n \in (M-\varepsilon,M+\varepsilon)$

Elegimos un número natural «k» que sea mayor que n_L y n_M. Por ejemplo, el siguiente del mayor de n_L y n_M, $k = \text{máximo}(n_L,n_M)+1$. Entonces:

$k > n_L \Rightarrow a_k \in (L-\varepsilon,L+\varepsilon)$

$k > n_M \Rightarrow a_k \in (M-\varepsilon,M+\varepsilon)$

Relacionando las dos expresiones, deducimos que hay un número, a_k, que pertenece a la vez a $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ y $(M-\varepsilon,M+\varepsilon)$, lo que es imposible porque la intersección es el conjunto vacío. Hemos llegado a una contradicción, no puede ser que una sucesión tenga dos límites.

Comentario

La definición de límite finito es muy precisa y permite hacer demostraciones rigurosas, es un buen ejemplo del tipo de trabajo que se hace en el análisis matemático.

 Licencia: CC0 1.0 Universal