Estrategia en las demostraciones de límite

Para demostrar que el límite de una sucesión de números reales es un determinado número, la estrategia consiste en suponer fijado el valor de ε y a partir de él determinar algún valor de n_0 con el que se consiga que cualquier término posterior a a_{n_0} pertenezca al intervalo (L−ε,L+ε). Es decir: a partir de ε calcular n_0.

Ejemplo

Vamos a demostrar que $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

Fijamos un valor de ε que sea positivo.

Como en este caso $L=0$, el intervalo (L−ε,L+ε) se convierte en (−ε,ε).

Como $\frac{1}{n}$ siempre es positivo, siempre se verifica $-\varepsilon<\frac{1}{n}$.

Por tanto, hay que buscar que $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Trasformamos la expresión:

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}<n$$

Es decir: dado un ε, hay que elegir algún n_0 que verifique $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$. Habrá infinitos para elegir, nos vale cualquiera.

Por ejemplo, para $\varepsilon=0{,}01$ podemos tomar $n_0=101$ porque $101>100=\frac{1}{0{,}01}$

Otro ejemplo: para $\varepsilon=0{,}0001$ podemos tomar $n_0=10001$ porque

$$10001>10000=\frac{1}{0{,}0001}$$

Para cualquier n mayor que el n_0 que hemos elegido, se verificará $\frac{1}{n}<\varepsilon$, porque

$n>n_0 \Rightarrow \frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$, como queríamos demostrar.

Comentarios

- En las demostraciones basta encontrar **un** valor de n_0; pero, si hay alguno, entonces habrá infinitos. Lo que debe quedar claro es cómo calcular **alguno**.
- Aunque no se diga explícitamente en la definición de límite finito, se admite que a_{n_0} pertenezca al intervalo (L−ε,L+ε).

Caso trivial: sucesiones constantes

La definición de límite finito es muy rica y admite muchas variantes. Un caso absolutamente trivial, y por tanto con una demostración un poco sorprendente, es el de las sucesiones constantes: **$\lim c = c$**. Es decir: si «c» es un número real, el límite de la sucesión {c} es el propio «c».

Demostración

Dado un $\varepsilon>0$ cualquiera, se puede tomar como n_0 cualquier número natural, ya que siempre se verifica que $c\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$. (¡Es tan obvio que resulta raro!).

Ejemplos. $\lim 4 = 4$. $\lim(-8) = -8$.

 Licencia: CC0 1.0 Universal