Definición de límite finito de una sucesión

Se dice que el límite de la sucesión de números reales $\{a_n\}$ es el número real L cuando $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} \mid n>n_0 \Rightarrow a_n\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.

Se escribe $\lim a_n = L$ (límite de a sub n igual a ele) o $a_n \to L$ (a sub ene tiende a ele).

Lectura

La expresión simbólica se lee así: para todo épsilon mayor que cero existe un ene sub cero perteneciente al conjunto de números naturales tal que si ene es mayor que ene sub cero entonces a sub ene pertenece al intervalo abierto de extremos ele menos épsilon y ele más épsilon.

Especificaciones adicionales

Esta es una definición muy clásica en la que, sin embargo, no se especifican dos detalles importantes porque se sobreentienden:

- La letra «ε» se utiliza para representar un número real.
- La letra «n» se utiliza para representar un número natural.

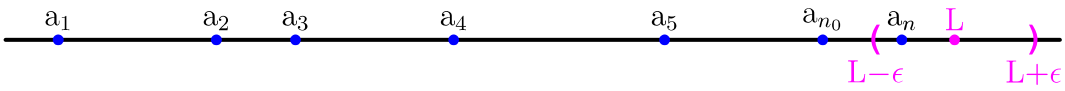
Explicación

Queremos definir con precisión qué significa que los términos de la sucesión se aproximan a L tanto como deseemos. Para ello, fijamos un número real ε positivo, pensando que podrá ser muy muy próximo a cero; imagina que sea una milésima (10^{-3}), una millonésima (10^{-6}), una billonésima (10^{-12}), una gugolésima (10^{-100}), etc. Será el «reto» que le pongamos a la sucesión: ¿serán tus términos capaces de pertenecer al intervalo (L–ε,L+ε)? La «respuesta» de la sucesión es que, a partir de alguno de sus elementos, el de lugar n_0, todos los elementos pertenecen.

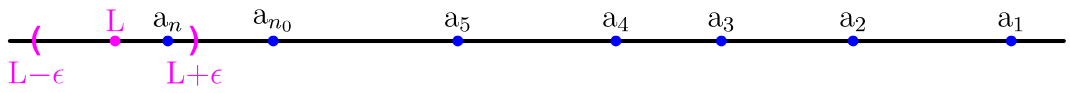
Otra manera de verlo: por muy próximo a cero que sea el número real positivo ε, todos los términos de la sucesión, salvo un número finito de ellos, pertenecen al intervalo (L–ε,L+ε). El número natural n_0 nos señala un lugar de la sucesión a partir del cual ya todos los términos pertenecen al intervalo (L–ε,L+ε).

Ejemplos de posibles representaciones gráficas

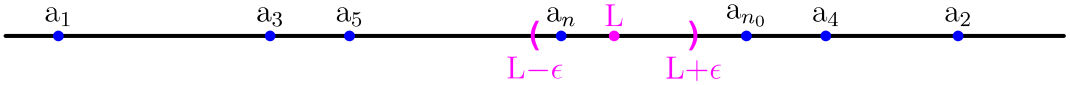
Ejemplo 1. Si la sucesión es creciente:



Ejemplo 2. Si la sucesión es decreciente:



Ejemplo 3. Si la sucesión no es creciente ni decreciente:



Sucesiones convergentes y divergentes

- Se dice que una sucesión es convergente cuando tiene límite finito. También se puede decir que la sucesión converge.
- Se dice que una sucesión es divergente cuando no tiene límite finito. También se puede decir que la sucesión diverge.

 Licencia: CC0 1.0 Universal