Propiedad de las cotas superiores

Si $K \in \mathbb{R}$ es una cota superior de la sucesión de números reales $\{a_n\}$, entonces cualquier número $M \in \mathbb{R}$ que verifique $K < M$ también es una cota superior.

Demostración

Aunque la demostración es bastante evidente, conviene que la veas escrita, porque otras demostraciones de este tema no serán tan fáciles.

La representación gráfica suele ser útil:



Como K es cota superior de $\{a_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < K$ y como $K < M$, también $a_n < M$, luego M es cota superior de $\{a_n\}$.

Propiedad de las cotas inferiores

Si $K \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de la sucesión de números reales $\{a_n\}$, entonces cualquier número $M \in \mathbb{R}$ que verifique $M < K$ también es una cota inferior.

Demostración

Es muy común en matemáticas que haya demostraciones tan parecidas a otras que los textos no las escriben, sino que se limitan a señalar «se deja a la consideración del lector». En este caso, tú debes decidir si podrías escribir tú mismo la demostración. Si crees que no podrías, sería señal de que no has entendido la demostración de la propiedad anterior, y deberías dedicarle más tiempo.

El supremo: la menor de las cotas superiores

Si una sucesión está acotada superiormente, tiene infinitas cotas superiores. Debido a cómo se definen los números reales, debe haber una cota superior que sea menor que todas las demás. Se llama **supremo** de la sucesión a esa cota.

El ínfimo: la mayor de las cotas inferiores

Si una sucesión está acotada inferiormente, tiene infinitas cotas inferiores. Debido a cómo se definen los números reales, debe haber una cota inferior que sea mayor que todas las demás. Se llama **ínfimo** de la sucesión a esa cota.

Observación

La existencia de supremo e ínfimo te puede parecer una propiedad muy intuitiva y casi obvia, pero no lo es en absoluto. Se basa en una definición muy precisa de los números reales que no se explica en la educación secundaria.

La propiedad **no** se cumple si consideramos sucesiones de números racionales dentro del conjunto universal $\mathbb{Q}$; es decir, sin poder utilizar $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, consideramos la sucesión $\{a_n\}$ definida de esta manera: a_n es el número racional formado con la parte entera 1 y la parte decimal formada por las primeras n cifras decimales de $\sqrt{2}$.

a → 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; 1,41421356; ...

Esta sucesión tiene infinitas cotas superiores; por ejemplo, 2 es una cota superior y por tanto cualquier número racional mayor que 2 también lo es. Sin embargo, no hay ninguna cota superior que sea un número racional y que sea menor que todas las demás. Sabemos que esto es así porque el supremo, dentro de $\mathbb{R}$, es $\sqrt{2}$, que no es un número racional.

Esta propiedad es la más importante diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

 Licencia: CC0 1.0 Universal