## Estudio del crecimiento de una sucesión

Este problema consiste en determinar si una sucesión es creciente, decreciente o ninguna de esas dos cosas conocido su término general. En algunos casos resulta sumamente sencillo, en otros puede ser más complicado.

La idea general consiste en comparar la expresión del término de lugar «n» con la expresión del término de lugar «n+1» para ver si se puede demostrar que una es menor o mayor que la otra. Para demostrar que una sucesión no es creciente ni decreciente basta encontrar un caso en que $a_n \leqslant a_{n+1}$ y otro en que $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Calcular unos cuantos términos de la sucesión suele ser de gran ayuda, pero para estar seguros de la respuesta se requiere una demostración rigurosa.

### Enunciados

Estudia el crecimiento de las siguientes sucesiones:

① $b_n = n^2$ ② $c_n = \dfrac{n+3}{n+1}$ ③ $d_n = (-1)^n \cdot n$

### Resoluciones

① La sucesión comienza así: $b \to 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

Parece claro que es una sucesión creciente. La demostración:

$b_n = n^2$ y $b_{n+1} = (n+1)^2$. Para compararlos, desarrollamos el cuadrado de la suma: $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. Y ahora es fácil demostrar que $b_n < b_{n+1}$:

$b_n = n^2 < n^2+2n+1 = (n+1)^2 = b_{n+1}$. Esta cadena muestra que $b_n < b_{n+1}$.

Solución: creciente.

② La sucesión comienza así: $c \to 2, \ \dfrac{5}{3}, \ \dfrac{3}{2}, \ \dfrac{7}{5}, \ \dfrac{4}{3}, \ldots$

Escrita con expresiones decimales: $c \to 2;\ 1{,}\overline{6};\ 1{,}5;\ 1{,}4;\ 1{,}\overline{3};\ \ldots$

Parece claro que es una sucesión decreciente. La demostración:

$c_n = \dfrac{n+3}{n+1}$ y $c_{n+1} = \dfrac{(n+1)+3}{(n+1)+1} = \dfrac{n+4}{n+2}$. Como las dos expresiones son fracciones, para compararlas usamos el método explicado en el nivel 1 de comparar los llamados producto de extremos y producto de medios.

Producto de extremos: $(n+3)(n+2) = n^2+5n+6$

Producto de medios: $(n+1)(n+4) = n^2+5n+4$

$n^2+5n+6 > n^2+5n+4 \Rightarrow (n+3)(n+2) > (n+1)(n+4) \Rightarrow \dfrac{n+3}{n+1} > \dfrac{n+4}{n+2} \Rightarrow c_n > c_{n+1}$

Solución: decreciente.

③ La sucesión comienza así: $d \to -1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

Está claro que no es creciente ni decreciente. Veamos por qué:

La sucesión no es creciente porque $d_2 > d_3$.

La sucesión no es decreciente porque $d_1 < d_2$.

Solución: ni creciente ni decreciente.

 Licencia: CC0 1.0 Universal