

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO MODELO DE EXAMEN CURSO 2014-2015 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	Modelo
--	--------

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cinco ejercicios de los que consta la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: Una hora y treinta minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B . Producir un litro de la bebida A cuesta 2€ , mientras que producir un litro de bebida B cuesta $0,5\text{€}$. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar más de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A . ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifíquense las respuestas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese A^{-1} .

b) Calcúlese $A^t \cdot A$.

Nota: A^t denota la traspuesta de la matriz A .

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

a) Dibújese, de manera esquemática, la región acotada del plano limitada por las gráficas de las curvas

$$y = \sqrt{6x}; \quad y = \frac{x^2}{6}.$$

b) Calcúlese el área de la región descrita en el apartado anterior.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran los sucesos incompatibles A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$. Calcúlese:

a) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

b) $P(B \cap \bar{A})$

Nota: \bar{S} denota al suceso complementario del suceso S .

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $1,2$ kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y $6,6$ kW, si $\mu = 6,3$ kW.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6,1 ; 6,9)$ para la media del consumo familiar diario.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + 4ay + z = 2a \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a .
- b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2.$$

- a) Determinéense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}.$$

- a) Determinéense sus asíntotas.
- b) Determinéense la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1, 5$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras, y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

- a) Del mismo color.
- b) De distinto color.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290; 275; 290; 325; 285; 365; 375; 310; 290; 300.

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

- a) Determinéense un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ .
- b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).			
	Planteamiento correcto del problema de programación lineal		0,75 puntos
	Representación correcta de la región factible o localización de los vértices		0,75 puntos
	Localización y obtención del mínimo		0,50 puntos
		Total ejercicio 1	2,00 puntos
Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).			
Apartado (a)	Cálculo correcto de A^{-1}		1,00 punto
		Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Cálculo correcto de $A^t A$		1,00 punto
		Total apartado (b)	1,00 punto
		Total ejercicio 2	2,00 puntos
Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).			
Apartado (a)	Dibujo esquemático similar al pedido		0,50 puntos
	Punto de corte de las gráficas		0,50 puntos
		Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Planteamiento correcto del área		0,50 puntos
	Cálculo correcto del área		0,50 puntos
		Total apartado (b)	1,00 punto
		Total ejercicio 3	2,00 puntos
Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).			
Apartado (a)	Planteamiento		0,50 puntos
	Cálculo correcto de la probabilidad pedida		0,50 puntos
		Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Planteamiento		0,50 puntos
	Cálculo correcto de la probabilidad pedida		0,50 puntos
		Total apartado (b)	1,00 punto
		Total ejercicio 4	2,00 puntos
Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).			
Apartado (a)	Planteamiento		0,50 puntos
	Cálculo correcto de la probabilidad		0,50 puntos
		Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$		0,50 puntos
	Cálculo correcto del nivel de confianza		0,50 puntos
		Total apartado (b)	1,00 punto
		Total ejercicio 5	2,00 puntos

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados
--

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a)	Determinación de los valores críticos	0,25 puntos
	Discusión correcta de cada caso (0,25x3)	0,75 puntos
	Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Resolución correcta del sistema para $a=-1$	1,00 punto
	Total apartado (b)	1,00 punto
	Total ejercicio 1	2,00 puntos

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a)	Cálculo correcto de $f'(x)$	0,50 puntos
	Determinación correcta de los intervalos pedidos	0,50 puntos
	Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Cálculo correcto de $f''(x)$	0,25 puntos
	Determinación correcta de los puntos destacados (3x0,25)	0,75 puntos
	Total apartado (b)	1,00 punto
	Total ejercicio 2	2,00 puntos

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a)	Obtención correcta de las asíntotas verticales	0,50 puntos
	Obtención correcta de la asíntota horizontal	0,50 puntos
	Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Cálculo correcto de la derivada	0,50 puntos
	Obtención correcta de la recta tangente	0,50 puntos
	Total apartado (b)	1,00 punto
	Total ejercicio 3	2,00 puntos

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a)	Planteamiento	0,50 puntos
	Cálculo correcto de la probabilidad pedida	0,50 puntos
	Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Planteamiento	0,50 puntos
	Cálculo correcto de la probabilidad pedida	0,50 puntos
	Total apartado (b)	1,00 punto
	Total ejercicio 4	2,00 puntos

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a)	Cálculo correcto de la media muestral	0,25 puntos
	Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$	0,25 puntos
	Determinación correcta del intervalo	0,50 puntos
	Total apartado (a)	1,00 punto
Apartado (b)	Planteamiento correcto del problema	0,50 puntos
	Cálculo correcto del tamaño mínimo	0,50 puntos
	Total apartado (b)	1,00 punto
	Total ejercicio 5	2,00 puntos

<p>NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados</p>

Soluciones OPCIÓN A

Problema 1.- El problema a resolver:

$$\text{mín } z = 2x_1 + 0,5x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

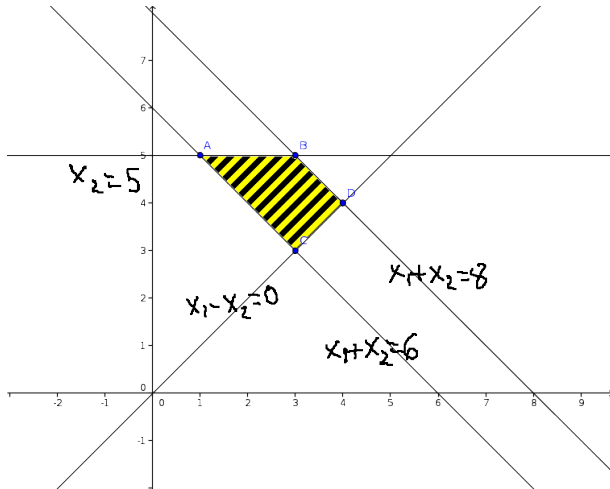
$$x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(donde x_1 y x_2 representan millones de litros de bebida A y B, respectivamente y z se expresa en millones de euros)



La representación gráfica del conjunto de restricciones da lugar a la región marcada en la figura. Los vértices y valores de z son

Vértices	$A = (1, 5)$	$B = (3, 5)$	$C = (3, 3)$	$D = (4, 4)$
Costes	$z = 4,5$	$z = 8,5$	$z = 7,5$	$z = 10$

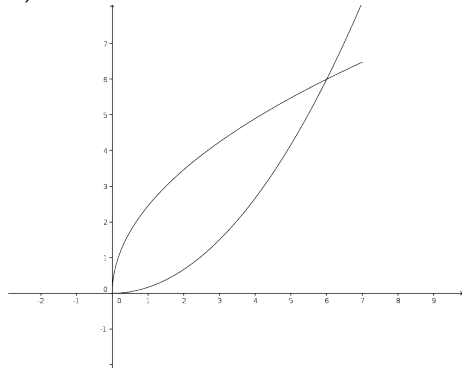
La solución óptima es $x_1 = 1, x_2 = 5$ y $z = 4,5$, que equivale a producir 1 millón de litros de bebida A y 5 millones de litros de bebida B. El coste de producción será de 4,5 millones de euros.

Problema 2.-

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

Problema 3.-

a)



(las curvas se cortan en $(6, 6)$ y en $(0, 0)$)

$$\text{b) Área} = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6} \right) dx = \left[2\sqrt{\frac{2}{3}}x^{3/2} - \frac{x^3}{18} \right]_0^6 = 12.$$

Problema 4.-

a) Por las leyes de De Morgan $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$

como son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

con lo cual $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,4 - 0,3 = 0,3$

b) $P(B \cap \bar{A}) = P(B) = 0,3$.

Ya que $A \cap B = \emptyset$, con lo que $B \subset \bar{A}$ y $B \cap \bar{A} = B$.

Problema 5.-

$$\text{a) } P(6 < \bar{X} < 6,6) = P\left(\frac{6-6,3}{1,2/\sqrt{50}} < Z < \frac{6,6-6,3}{1,2/\sqrt{50}} \right) = P(-1,77 < Z < 1,77) = 2\phi(1,77) - 1 = 0,9232$$

b) $2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6,9 - 6,1 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 0,4 \frac{\sqrt{50}}{1,2} = 2,36$ por lo que se ha obtenido con un nivel de confianza del 98%

OPCIÓN B

Problema 1.-

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4a^2 + 6a - 2 = 0 \implies a = 1, 1/2$$

- Si $a \neq 1, 1/2 \implies$ Sistema Compatible Determinado

- Si $a = 1/2 \implies \text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2 \implies$ Sistema Compatible Indeterminado

- Si $a = 1 \implies \text{rango}(A) = 2, \text{rango}(B) = 3 \implies$ Sistema Incompatible

b) Para $a = -1$ el sistema que debemos resolver es

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ x - 4y + z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = 3/4, \quad y = 1/2, \quad z = -3/4$$

Problema 2.-

$$a) f'(x) = 24 - 30x + 6x^2 = 6(x-1)(x-4) \quad f'(x) = 0 \implies x = 1, x = 4$$

Es creciente en $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

Es decreciente en $(1, 4)$

$$b) f''(x) = -30 + 12x$$

Tiene un máximo en $x = 1$

Tiene un mínimo en $x = 4$

Tiene un punto de inflexión en $x = 5/2$.

Problema 3.-

$$a) x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = -1 \text{ ó } x = 3$$

La función presenta asíntotas verticales a las rectas $x = -1, x = 3$

Asíntota horizontal $y = 3$

$$b) f'(x) = \frac{6x(x^2 - 2x - 3) - 3x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} = \frac{-6x^2 - 18x}{(x-3)^2(x+1)^2}$$

La recta tangente es $y = \frac{8}{3}x + 7$

Problema 4.-

a)

$$P(\text{Mismo color}) = P(2B) + P(2N) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{43}{81}$$

b)

$$P(\text{Distinto color}) = 1 - P(\text{Mismo color}) = 1 - \frac{43}{81} = \frac{38}{81}$$

Problema 5.-

a) $\bar{X} = 310,5, z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{34,5}{\sqrt{10}} = 21,383$. El intervalo de confianza es $(310,5 - 21,383; 310,5 + 21,383) = (289,117; 331,883)$

b) $z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 10 \implies \sqrt{n} \geq 1,96 \frac{34,5}{10} = 6,762 \implies n \geq 45,725$.

El tamaño muestral mínimo es 46.

Principales conceptos que se tendrán en cuenta en la elaboración de la Prueba de Acceso a las Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado correspondientes a la materia

“Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II”

Curso 2014-15

1.- Álgebra.

- Utilización de matrices como forma de representación de situaciones de contexto real.
- Transposición, suma, producto de matrices y producto de matrices por números reales.
- Concepto de inversa de una matriz. Obtención de la inversa de matrices de órdenes dos y tres.
- Determinantes de órdenes dos y tres.
- Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones matriciales sencillos. Regla de Cramer.
- Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas y un parámetro.
- Resolución de problemas con enunciados relativos a las ciencias sociales y a la economía que pueden resolverse mediante el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.
- Interpretación y resolución gráfica de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Iniciación a la programación lineal bidimensional. Región factible. Solución óptima.
- Aplicación de la programación lineal a la resolución de problemas de contexto real con dos variables. Interpretación de la solución obtenida.

2.- Análisis.

- Límite y continuidad de una función en un punto.
- Límites laterales. Ramas infinitas.
- Continuidad de funciones definidas a trozos.
- Determinación de asíntotas de funciones racionales.
- Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.
- Relación entre continuidad y derivabilidad.
- Derivación de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas. Reglas de derivación: sumas, productos y cocientes. Composición de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones:
 - Cálculo de la tasa de variación instantánea, ritmo de crecimiento, coste marginal, etc.
 - Obtención de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto de la misma.

- Obtención de extremos relativos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.
- Resolución de problemas de optimización.
- Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades globales y locales.
- Integrales indefinidas. Propiedades elementales. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas o reducibles a inmediatas.
- Integrales definidas de funciones polinómicas, exponenciales y racionales inmediatas mediante la aplicación de la regla de Barrow.
- Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas planas.

3.- Probabilidad y Estadística.

- Experimentos aleatorios. Concepto de espacio muestral y de suceso elemental.
- Operaciones con sucesos. Leyes de De Morgan.
- Definición de probabilidad. Probabilidad de la unión, intersección, diferencia de sucesos y suceso contrario.
- Regla de Laplace de asignación de probabilidades.
- Probabilidad condicionada. Teorema del Producto, Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes.
- Concepto de población y muestra. Muestreo. Parámetros poblacionales y estadísticos muestrales.
- Distribuciones de probabilidad de las medias muestrales. Caso normal.
- Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. Tamaño muestral mínimo