PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 3 puntos.

a) (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1,$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

b) (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

a) Como $f(x)$ no se anula en el intervalo [0,1], el área pedida es $\int_0^1 f$:

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx = \left. \frac{c}{5}x^5 + \frac{1}{3c}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

Solución El área es $\dfrac{c}{5} + \dfrac{1}{3c} + 1$

b) Llamamos $A(c) = \dfrac{c}{5} + \dfrac{1}{3c} + 1$ y resolvemos la ecuación $A'(c) = 0$:

$$A'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2};\ A'(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0 \Rightarrow 5 = 3c^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Como el enunciado pide $c > 0$, solo estudiamos con A'' la solución positiva:

$$A''(c) = \frac{2}{3c^3} \Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) > 0 \Rightarrow A \text{ tiene un mínimo en } c = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.291$$

Solución $c = 1.291$