

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2008. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

se pide:

- (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a . Resolverlo cuando la solución sea única.
- (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y = 2$.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array} \right)$

Estudiamos cuándo puede ser $\text{rg}(A) = 2$ resolviendo la ecuación $\det(A) = 0$

$$\det(A) = -1 + a^2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

Si $a = -1$, las matrices quedan $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$ y $\text{rg}(A) = 1$ y $\text{rg}(A^*) = 2$, luego el sistema es incompatible.

Si $a = 1$, las matrices quedan $A|A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$ y $\text{rg}(A) = 1$ y $\text{rg}(A^*) = 1$, luego el sistema es no homogéneo, compatible e indeterminado.

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ entonces $\det(A) \neq 0$ y por tanto $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 2$, con lo que el sistema es no homogéneo compatible determinado.

El sistema tiene solución única cuando $a \neq -1$ y $a \neq 1$. En ese caso el sistema es de Cramer y se puede resolver mediante la regla de Cramer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + a^2 + a \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det(A)} = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - 1} = \frac{(a+2)(a-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{a+2}{a-1}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix} = a+1 - 2a = 1 - a \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\det(A)} = \frac{a-1}{a^2 - 1} = \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$$

La solución del sistema es $\begin{cases} x = \frac{a+2}{a-1} \\ y = \frac{1}{a-1} \end{cases}$

b) Si $a = 1$ el sistema es equivalente a $\{x - y = 2$, que tiene infinitas soluciones.

Una de ellas es $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, $y = \frac{1}{a-1} \Rightarrow \frac{1}{a-1} = 2 \Rightarrow 1 = 2a - 2 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Solución $a = 1$ y $a = \frac{3}{2}$