INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una y sólo una de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
Puntuación: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos
Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2, 0), y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$$

a) **(1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.**
b) **(1 punto) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.**

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos
Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Se pide:
a) **(1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.**
b) **(1,5 puntos) Resolverlo para *m* = 1.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos
Sea la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:
a) **(1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto.**
b) **(1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.**

c) **(1 punto) Calcular** $\int_0^{p/3} f(x)dx$ **.**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos

Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) **(1,5 puntos) Hallar el precio de cada tipo de billete.**

b) **(0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.**

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos

a) **(1 punto) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad A + B = AB. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:**

$$(I-B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(donde I denota la matriz identidad)

b) (1 punto) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

hallar la matriz B para la cual se verifica A + B = AB

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos

Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$

a) **(1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.**

b) **(1 punto) Dibujar su gráfica.**

c) **(1 punto) Calcular el área del recinto acotado por la** $y = f(x)$**, las rectas x = 0, x = 5, y el eje OX.**

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos

Dado el plano $\pi \equiv$ **x + y + z = 0, y la recta** $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}$**, se pide:**

a) **(1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano** π **y la recta r.**

b) **(2 puntos) Encontrar un plano** π'**, paralelo a** π**, tal que el punto Q´ en el que se cortan el plano** π' **y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.**

SOLUCIÓN OPCIÓN A

Ejercicio 1

El plano pedido está determinado por uno cualquiera de los puntos A o B y por los vectores **AB** = (0, 2, 0) – (1, 0, 1) = (–1, 2, –1) y $\vec{v}_p$ = (1, –2, –1), este último normal al plano dado.

Su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1 - l + m \\ y = 2l - 2m \\ z = 1 - l - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 2 & -2 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 2y = 4$$

Ejercicio 2

Expresamos *s* en paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r$ = (–1, 1, 1), $\vec{v}_s$ = (1, –2, –3) y **RS** = (0, –2, 1) – (1, –1, k) = (–1, –1, 1 – k)

siendo R un punto de *r* y S un punto de *s*.

Las dos rectas están en el mismo plano cuando $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son paralelos, cosa que no sucede, o cuando $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y **RS** son linealmente dependientes. Esto sucede cuando

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(1 - k) + 3 - 1 + k + 3 - 3 = 0 \Rightarrow k = 4$$

b) El plano pedido viene determinado por el punto R = (1, –1, –3) y los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$

Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+1 & 1 & -2 \\ z-4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 5 = 0.$$

Ejercicio 3

a) Calculamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m \quad \Rightarrow \quad \text{r(A)} = 3 \text{ si } m \neq 1; \ \text{r(A)} = 2 \text{ si } m = 1.$$

- Para $m = 1$, la matriz ampliada es M = $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2, pues $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 3 + 9 = 0$; y el menor formado por las tres primeras columnas, que es el que corresponde a A, también es nulo.

En consecuencia se tiene:

- Si m ≠ 1, el sistema es compatible determinado → solución única.
- Si m = 1, el sistema es compatible indeterminado → infinitas soluciones.

b) Para el caso m = 1, el sistema queda: $\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 9 - 3z \\ x + 2y = 5 - z \end{cases}$,

cuya solución es: $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$

Ejercicio 4

a) La función está definida en el intervalo dado (y para todo número real). Puede observarse que l denominador siempre es ≥ 1.

Es periódica de periodo 2π; por tanto, basta con estudiarla en el intervalo [0, 2π]

Hacemos su derivada: $f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$

Se anula en x = π/3 y en x = 5π/3 (también en x = π/3 –2π = –5π/3 y en x = 5π/3 – 2π = –π/3).

Derivada segunda: $f''(x) = \dfrac{-2 senx(1 + \cos x)}{(2 - \cos x)^3}$

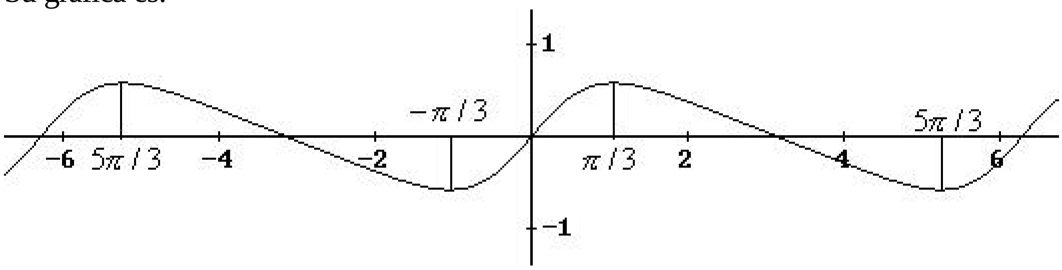
Como $f''(\pi/3) < 0$, en x = π/3 se da un máximo.
Por la periodicidad se tendrá otro máximo en x = π/3 –2π = –5π/3.

Como $f''(5\pi/3) > 0$, en x = π/3 se da un mínimo.
Por la periodicidad se tendrá otro máximo en en x = 5π/3 – 2π = –π/3.

b) Para representarla, además de lo anterior puede verse que la función corta al eje OX cuando sen x = 0 → x = 0, π y 2π; y en x = –π y –2π.
En esos mismos valores se dan los puntos de inflexión, pues la derivada segunda se anula en ellos.

Los valores máximos y mínimos son: $f(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, máximo; $f(5\pi/3) = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$, mínimo.

Su gráfica es:



c) La integral es inmediata (para verlo con más claridad podría hacerse el cambio cos x = t)

Se tiene: $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{senx}{2-\cos x}\,dx = \left[\ln(2-\cos x)\right]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$