PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)dx = 1$.

a) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow x = \left\{ \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \right.$$

Sustituimos en la derivada segunda las soluciones obtenidas:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$$

$f''(-1) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = -1$

$f''(1) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = 1$

Calculamos las ordenadas de los puntos sustituyendo en f:

$$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = \frac{-1}{2}; x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1}{2};$$

$\boxed{\text{Solución}}$ f tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, \frac{-1}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$.

b) Calculamos el valor de la integral definida:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^a = \frac{1}{2}\ln(a^2+1)$$

Resolvemos la ecuación pedida:

$$\int_0^a f(x)dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(a^2+1) = 1 \Rightarrow \ln(a^2+1) = 2 \Rightarrow a^2+1 = e^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{e^2-1}$$

Como se pide $a > 0$, debe ser $a = \sqrt{e^2-1} = 2.528$

$\boxed{\text{Solución}}$ $a = 2.528$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

b) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1).

a) Consideramos las funciones $f_1(x) = x(x-2)$ y $f_2(x) = \sqrt[3]{x-2}$, que forman parte de la definición de la función f.

Como f_1 y f_2 son continuas, f es continua en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$.

Como f_1 y f_2 son continuas, f será continua en 2 cuando $f_1(2) = f_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 0 \\ f_2(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(2) = f_2(2) \Rightarrow f \text{ es continua en } 2.$$

Por tanto f es continua.

Como f_1 es derivable y f_2 es derivable en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$, f es derivable en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$.

Para estudiar la derivabilidad de f en el punto 2 recurrimos a la definición de derivada y comenzamos por calcular la derivada por la derecha:

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_2(2+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2+h-2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty \Rightarrow f \text{ no es derivable en } 2.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ f es continua. f es derivable en $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$

b) $f(3) = 1$, luego efectivamente el punto $(3, 1)$ pertenece a la gráfica de f.

$$f_2(x) = \sqrt[3]{x-2} = (x-2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f_2'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$$

La pendiente de la recta tangente vendrá dada por la derivada:

$$f'(3) = f_2'(3) = \frac{1}{3}(3-2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x-3) \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x$

$\boxed{\text{Solución}}$ $y = \dfrac{1}{3}x$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\lambda z & = & \lambda^2 \\ y-z & = & \lambda \\ x+\lambda y+z & = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right)$

$rg(A) \geqslant 2$ ya que tiene un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$det(A) = 1 - 1 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Para estudiar el rango de A^* calculamos el menor de A^* obtenido ampliando el menor de orden 2 no nulo de A con la columna de términos independientes y vemos cuándo se anula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda - \lambda^2 - \lambda^2 = -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right.$$

Caso $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. En este caso $rg(A^*) = 3$, luego el sistema es no homogéneo e incompatible.

Caso $\lambda = 0$. $rg(A^*) = 2$ y el sistema es homogéneo, compatible indeterminado.

Caso $\lambda = 1$. $rg(A^*) = 2$ y el sistema es no homogéneo, compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando x e y en función de z.

$$\left\{\begin{array}{rrcr|l} x & +y & = & \lambda^2 - \lambda z & x = \lambda^2 - \lambda - 2\lambda z \\ & y & = & \lambda + \lambda z & y = \lambda + \lambda z \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda^2 - \lambda - 2\lambda\mu \\ y = \lambda + \lambda\mu \quad (\mu \in \mathbf{R}) \\ z = \mu \end{array}\right.$

c) Para $\lambda = 2$ el sistema es incompatible, luego los tres planos no tienen ningún punto en común. Como, además, ninguna ecuación es múltiplo de otra, no hay dos planos que sean paralelos entre sí.

$\boxed{\text{Solución}}$ Cada dos planos se cortan en una recta diferente.

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se consideran las rectas: $r : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$; $s : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$.

a) (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

b) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

c) (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1,0,0)$.

a) Para decidir el método que vamos a usar para calcular la distancia entre las rectas comenzamos por estudiar su posición relativa.

De la ecuación de r se obtiene un punto $P_r = (0,1,3)$ y su vector de dirección $\vec{v}_r = (1,-2,2)$.

De la ecuación de s se obtiene un punto $P_s = (2,0,-1)$ y su vector de dirección $\vec{v}_s = (3,1,-1)$.

Los vectores de dirección no son proporcionales, así que las rectas se cortan o se cruzan. Para decidirlo calculamos el producto mixto $[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$.

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-6-4-24-1-4 = -35 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

Para calcular la distancia se necesita $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$:

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,7,7)$$

La distancia es: $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \dfrac{|-35|}{\sqrt{0^2+7^2+7^2}} = \dfrac{35}{\sqrt{98}} = 3,536$

Solución: $3{,}536\ u$

b) Llamamos t a la recta pedida. Su vector de dirección es $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (0,7,7) \Rightarrow \vec{v}_t = (0,1,1)$ Daremos t como intersección de los planos Π y Σ que la contienen.

Π es el plano que pasa por el punto P_r y está generado por $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_t$:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4x-(y-1)+z-3 = -4x-y+z-2 \Rightarrow \Pi \equiv 4x+y-z+2=0$$

Σ es el plano que pasa por el punto P_s y está generado por $\vec{v}_s$ y $\vec{v}_t$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2)-3y+3(z-1) = 2x-3y+3z-7 \Rightarrow \Sigma \equiv 2x-3y+3z-7=0$$

Solución: $\left\{ \begin{array}{l} 4x+y-z+2=0 \\ 2x-3y+3z-7=0 \end{array} \right.$

c) Daremos la recta pedida como intersección de los planos que la contienen.

Π_r es el plano que pasa por el punto P_r y está generado por $\overrightarrow{PP_r}$ y $\vec{v}_r$:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x+5(y-1)+z-3 = 8x+5y+z-8 \Rightarrow \Pi_r \equiv 8x+5y+z-8=0$$

Π_s es el plano que pasa por el punto P_s y está generado por $\overrightarrow{PP_s}$ y $\vec{v}_s$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x-2-2y+z-1 = x-2y+z-3 \Rightarrow \Pi_s \equiv x-2y+z-3=0$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{ \begin{array}{l} 8x+5y+z-8=0 \\ x-2y+z-3=0 \end{array} \right.$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0,3)$ y $B(0,-1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Primera resolución

El lugar geométrico pedido es una hipérbola con focos en los puntos A y B.

La distancia focal es $d(A,B)=4 \Rightarrow 2c=4 \Rightarrow c=2$

El centro es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, el punto $C=(0,1)$.

Dos vértices de la hipérbola son $D=(0,\frac{1}{2})$ y $E=(0,\frac{3}{2})$, que cumplen la condición y están en la recta determinada por A y B.

Un eje mide $d(D,E)=1 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

Calculamos el otro eje: $c^2=b^2+a^2 \Rightarrow 2^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+a^2 \Rightarrow a=\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{15}{4}}$

La ecuación es $\dfrac{(y-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\dfrac{(x-0)^2}{\left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2}=1$ que simplificada queda $\dfrac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{x^2}{\frac{15}{4}}=1$

$\boxed{\text{Solución}}$ La hipérbola de ecuación $\dfrac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{x^2}{\frac{15}{4}}=1$

Segunda resolución

El lugar geométrico pedido es una hipérbola de focos los puntos A y B. Llamamos $P=(x,y)$ a un punto cualquiera de ella y encontramos la ecuación escribiendo algebraicamente la condición y simplificando la expresión.

$$d(P,A)-d(P,B)=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{x^2+(y+1)^2}=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=1+\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2=1+x^2+(y+1)^2+2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-6y+9=1+x^2+y^2+2y+1+2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -8y+7=2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow 64y^2-112y+49=4x^2+4y^2+8y+4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60y^2-120y+45-4x^2=0 \Rightarrow 60y^2-120y+60-4x^2=15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60(y-1)^2-4x^2=15$$

$\boxed{\text{Solución}}$ La hipérbola de ecuación $60(y-1)^2-4x^2=15$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2 \; ; \; \pi_2 : x + ay + z = -1 \; ; \; \pi_3 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

a) Para que tres planos tengan una recta común debe ocurrir que el sistema de ecuaciones formado por sus tres ecuaciones sea compatible indeterminado con un grado de libertad. Por tanto, estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x + y + az = -2 \\ x + ay + z = -1 \\ ax + y + z = 3 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Hay que calcular los valores de a que hacen $rg(A) = rg(A^*) = 2$

$$det(A) = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)(a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$a = 1 \Rightarrow rg(A) = 1$, luego $a = 1$ no nos vale.

$a = -2 \Rightarrow rg(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Para calcular $rg(A^*)$ intentamos ampliar este menor de orden 2 con la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 - 2 + 8 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $a = -2$

b) Para $a=-2$ el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando x e y en función de z.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=-2+2z \\ x-2y=-1-z \end{array}\right. \quad \Big| \quad 3y=-1+3z \Rightarrow y=-\frac{1}{3}+z$$

$$x+y=-2+2z \Rightarrow x=-y-2+2z=\frac{1}{3}-z-2+2z=-\frac{5}{3}+z$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{3}+\lambda \\ y=-\frac{1}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbf{R})$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.
Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A.

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

a) $A^2 = I \Rightarrow AA = I \Rightarrow A^{-1} = A$, ya que A cumple la definición de A^{-1}.

$\boxed{\text{Solución}}$ $A^{-1} = A$

b) n par $\Rightarrow n = 2m \Rightarrow A^n = A^{2m} = (A^2)^m = I^m = I$

n impar $\Rightarrow n = 2m + 1 \Rightarrow A^n = A^{2m+1} = A^{2m}A = IA = A$

$\boxed{\text{Solución}}$ Si n es par, $A^n = I$; si n es impar, $A^n = A$

c) $A^2 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 + a = 0 \\ a^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow a = -1$

$\boxed{\text{Solución}}$ $a = -1$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f(1) = 2 \quad ; \quad f'(0) = 3 \quad ; \quad f'(1) = 4$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

a) Aplicamos la definición de derivada de una función en un punto

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h + f(0)) - f(0 + f(0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = f'(1) = 4$$

Solución $\quad g'(0) = 4$

b) El límite pedido es una indeterminación $\frac{0}{0}$, luego se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{4(f(x))(f'(x)) - f'(x+1)}{e^x} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - 4}{1} = 8$$

Solución $\quad$ El límite pedido vale 8.