PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f(1) = 2 \quad ; \quad f'(0) = 3 \quad ; \quad f'(1) = 4$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.

b) (2 puntos) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

a) Aplicamos la definición de derivada de una función en un punto

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + f(0)) - f(0 + f(0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = f'(1) = 4$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $g'(0) = 4$

b) El límite pedido es una indeterminación $\frac{0}{0}$, luego se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{4(f(x))(f'(x)) - f'(x+1)}{e^x} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 3 - 4}{1} = 8$$

$\boxed{\text{Solución}}$ El límite pedido vale 8.