PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de septiembre.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.
Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A.

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

a) $A^2 = I \Rightarrow AA = I \Rightarrow A^{-1} = A$, ya que A cumple la definición de A^{-1}.

Solución $A^{-1} = A$

b) n par $\Rightarrow n = 2m \Rightarrow A^n = A^{2m} = (A^2)^m = I^m = I$

n impar $\Rightarrow n = 2m + 1 \Rightarrow A^n = A^{2m+1} = A^{2m}A = IA = A$

Solución Si n es par, $A^n = I$; si n es impar, $A^n = A$

c) $A^2 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 + a = 0 \\ a^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow a = -1$

Solución $a = -1$