

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se consideran las rectas: $r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$; $s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

- (1 punto) Calcular la distancia entre r y s .
- (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s que corta a ambas.
- (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

- a) Para decidir el método que vamos a usar para calcular la distancia entre las rectas comenzamos por estudiar su posición relativa.

De la ecuación de r se obtiene un punto $P_r = (0, 1, 3)$ y su vector de dirección $\vec{v}_r = (1, -2, 2)$.

De la ecuación de s se obtiene un punto $P_s = (2, 0, -1)$ y su vector de dirección $\vec{v}_s = (3, 1, -1)$.

Los vectores de dirección no son proporcionales, así que las rectas se cortan o se cruzan. Para decidirlo calculamos el producto mixto $[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$.

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 4 - 24 - 1 - 4 = -35 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

Para calcular la distancia se necesita $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$:

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 7, 7)$$

$$\text{La distancia es: } d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|-35|}{\sqrt{0^2 + 7^2 + 7^2}} = \frac{35}{\sqrt{98}} = 3,536$$

Solución 3,536 u

- b) Llamamos t a la recta pedida. Su vector de dirección es $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (0, 7, 7) \Rightarrow \vec{v}_t = (0, 1, 1)$. Daremos t como intersección de los planos Π y Σ que la contienen.

Π es el plano que pasa por el punto P_r y está generado por \vec{v}_r y \vec{v}_t :

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4x - (y-1) + z - 3 = -4x - y + z - 2 \Rightarrow \Pi \equiv 4x + y - z + 2 = 0$$

Σ es el plano que pasa por el punto P_s y está generado por \vec{v}_s y \vec{v}_t :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2) - 3y + 3(z-1) = 2x - 3y + 3z - 7 \Rightarrow \Sigma \equiv 2x - 3y + 3z - 7 = 0$$

Solución $\begin{cases} 4x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

c) Daremos la recta pedida como intersección de los planos que la contienen.

Π_r es el plano que pasa por el punto P_r y está generado por $\overrightarrow{PP_r}$ y \vec{v}_r :

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x + 5(y-1) + z - 3 = 8x + 5y + z - 8 \Rightarrow \Pi_r \equiv 8x + 5y + z - 8 = 0$$

Π_s es el plano que pasa por el punto P_s y está generado por $\overrightarrow{PP_s}$ y \vec{v}_s :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 2 - 2y + z - 1 = x - 2y + z - 3 \Rightarrow \Pi_s \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

Solución	$\begin{cases} 8x + 5y + z - 8 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$
----------	-----------------------------------------------------------------------