

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

- a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .
 b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
 c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array} \right)$

$rg(A) \geq 2$ ya que tiene un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$det(A) = 1 - 1 - \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Para estudiar el rango de A^* calculamos el menor de A^* obtenido ampliando el menor de orden 2 no nulo de A con la columna de términos independientes y vemos cuándo se anula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda - \lambda^2 - \lambda^2 = -2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Caso $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. En este caso $rg(A^*) = 3$, luego el sistema es no homogéneo e incompatible.

Caso $\lambda = 0$. $rg(A^*) = 2$ y el sistema es homogéneo, compatible indeterminado.

Caso $\lambda = 1$. $rg(A^*) = 2$ y el sistema es no homogéneo, compatible indeterminado.

- b) Para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando x e y en función de z .

$$\begin{cases} x + y = \lambda^2 - \lambda z \\ y = \lambda + \lambda z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \lambda^2 - \lambda - 2\lambda z \\ y = \lambda + \lambda z \end{cases}$$

Solución $\begin{cases} x = \lambda^2 - \lambda - 2\lambda\mu \\ y = \lambda + \lambda\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbf{R})$

c) Para $\lambda = 2$ el sistema es incompatible, luego los tres planos no tienen ningún punto en común. Como, además, ninguna ecuación es múltiplo de otra, no hay dos planos que sean paralelos entre sí.

Solución

 Cada dos planos se cortan en una recta diferente.