

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

a) (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos

b) (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)dx = 1$.

a) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Sustituimos en la derivada segunda las soluciones obtenidas:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (-x^2 + 1)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f''(-1) > 0 \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = -1$$

$$f''(1) < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } x = 1$$

Calculamos las ordenadas de los puntos sustituyendo en f :

$$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = \frac{-1}{2}; x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1}{2};$$

Solución f tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, \frac{-1}{2})$ y un máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$.

b) Calculamos el valor de la integral definida:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1)$$

Resolvemos la ecuación pedida:

$$\int_0^a f(x)dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1) = 1 \Rightarrow \ln(a^2 + 1) = 2 \Rightarrow a^2 + 1 = e^2 \Rightarrow a = \pm \sqrt{e^2 - 1}$$

Como se pide $a > 0$, debe ser $a = \sqrt{e^2 - 1} = 2.528$

Solución $a = 2.528$