PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Se considera una varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

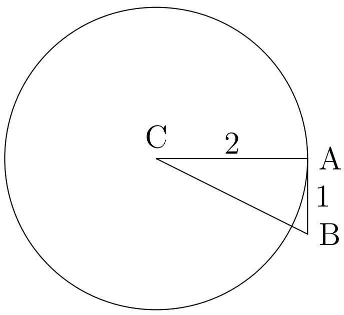
a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

a) Encontramos el centro y el radio de la circunferencia dada:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

El centro es $C = (2, 1)$ y el radio es $R = 2$



El triángulo ABC es rectángulo en A, de modo que $d(B, C) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Solución | El punto B describe la circunferencia de centro el punto $(2, 1)$ y radio $\sqrt{5}$

b) La ecuación de la circunferencia de centro el punto $(2, 1)$ y radio $\sqrt{5}$ es

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Solución | $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Sean las rectas $r:\begin{cases} x-2y-6z=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{a}=z \end{cases}$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a=-2$.

a) Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones implícitas de r obtenemos sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x-2y-6z=1 \\ x+y=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 3x-6z=1 \\ y=-x \end{array} \right| \; z=\frac{1-3x}{-6}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}x \;\Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

De la ecuación de r se obtiene un punto $P_r=(0,0,-\frac{1}{6})$ y su vector de dirección $(1,-1,\frac{1}{2})$, aunque es más cómodo tomar su múltiplo $\vec{v}_r=(2,-2,1)$.

De la ecuación de s se obtiene un punto $P_s=(0,1,0)$ y su vector de dirección $\vec{v}_s=(2,a,1)$.

Para que los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ sean proporcionales debe ocurrir $\dfrac{2}{2}=\dfrac{-2}{a}=\dfrac{1}{1}\Rightarrow a=-2$

Si $a=-2$, como $P_s\notin r$, las rectas son paralelas.

Si $a\neq -2$, calculamos el producto mixto $[6\overrightarrow{P_sP_r},\vec{v}_r,\vec{v}_s]$:

$$[6\overrightarrow{P_sP_r},\vec{v}_r,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}=12+2a+4-12=2a+4\neq 0\Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ Si $a=-2$, son paralelas; si $a\neq -2$, se cruzan.

b) $d(r,s)=d(P_r,s)=\dfrac{|\vec{v}_s\times\overrightarrow{P_sP_r}|}{|\vec{v}_s|}$

$$\vec{v}_s\times\overrightarrow{P_sP_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-2\right)\Rightarrow d(r,s)=\frac{\left|\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-2\right)\right|}{|(2,-2,1)|}=\frac{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+4}}{\sqrt{4+4+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{53}{9}}}{3}=\sqrt{53}=7.280u$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $7.280u$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2+2A=I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($\det(A)\neq 0$) y expresar A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3=pI+qA$.

c) (1 punto) Si $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

a) Suponemos que $|A|=0$ y llegaremos a una contradicción, lo que demostrará que $|A|\neq 0$:

$$A^2+2A=I \overset{(1)}{\Longrightarrow} AA+2IA=I \overset{(2)}{\Longrightarrow} (A+2I)A=I \overset{(3)}{\Longrightarrow} \det((A+2I)A)=\det(I) \overset{(4)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \det(A+2I)\det(A)=1 \overset{(5)}{\Longrightarrow} \det(A+2I)\cdot 0=1 \overset{(6)}{\Longrightarrow} 0=1 \rightarrow \text{contradicción}$$

(1) $\rightarrow$ Definición de cuadrado y de I
(2) $\rightarrow$ El producto de matrices es distributivo respecto a la suma
(3) $\rightarrow$ Dos matrices iguales tienen el mismo determinante
(4) $\rightarrow$ El determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes
(4) $\rightarrow$ Sabemos que $\det(I)=1$
(5) $\rightarrow$ Estamos suponiendo que $\det(A)=0$
(6) $\rightarrow$ Cualquier número multiplicado por 0 da 0

Trasformamos la expresión que da el enunciado para llegar al valor de A^{-1}:

$$A^2+2A=I \overset{(1)}{\Longrightarrow} I=AA+2A \overset{(2)}{\Longrightarrow} IA^{-1}=(AA+2A)A^{-1} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} A^{-1}=(AA)A^{-1}+2AA^{-1} \overset{(4)}{=} A(AA^{-1})+2I \overset{(5)}{=} AI+2I \overset{(6)}{=} A+2I$$

(1) $\rightarrow$ Definición de cuadrado
(2) $\rightarrow$ Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}
(3) y (6) $\rightarrow$ Definición de I
(3) $\rightarrow$ El producto de matrices es distributivo respecto a la suma
(4) $\rightarrow$ El producto de matrices es asociativo
(4) y (5) $\rightarrow$ Definición de matriz inversa

$\boxed{\text{Solución}}$ $|A|\neq 0$ y $A^{-1}=A+2I$

b) Trasformamos la expresión que da el enunciado para llegar al valor de A^3:

$$A^2+2A=I \Rightarrow A^2=I-2A \Rightarrow A^3=(I-2A)A=A-2A^2=A-2(I-2A)=$$

$$=A-2I+4A=-2I+5A$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $p=-2$ y $q=5$

c) Sustituimos en la expresión del enunciado las matrices por sus valores:

$$A^2 + 2A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1+k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & 1+k^2+2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k debe ser solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ k+2 = 0 \\ k+2 = 0 \\ 1 + k^2 + 2k = 1 \end{cases}$$

Evidentemente, $k = -2$ verifica las cuatro ecuaciones.

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad k = -2$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

> Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.
>
> a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
>
> b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

a) Necesitamos la ecuación de la recta t, tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa r. La ordenada del punto de contacto es $y = 4 - r^2$. La pendiente es $y'_{x=r}$:

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x \Rightarrow y'_{x=r} = -2r$$

Por tanto la ecuación de t es $y - (4 - r^2) = -2r(x - r)$

Cortando la recta t con los dos ejes de coordenadas calculamos las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo $T(r)$, que llamaremos x_r e y_r:

$$(x_r, 0) \in t \Rightarrow -(4 - r^2) = -2r(x_r - r) \Rightarrow \frac{4 - r^2}{2r} = x_r - r \Rightarrow x_r = \frac{2}{r} + \frac{r}{2}$$

$$(0, y_r) \in t \Rightarrow y_r - (4 - r^2) = -2r(-r) \Rightarrow y_r = r^2 + 4$$

La superficie del triángulo $T(r)$ es

$$S(r) = \frac{1}{2}x_r y_r = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2}\right)\left(r^2 + 4\right) = \frac{1}{2}\left(2r + \frac{8}{r} + \frac{r^3}{2} + 2r\right) = \frac{1}{4}\left(r^3 + 8r + \frac{16}{r}\right)$$

Calculamos el mínimo de $S(r)$ resolviendo la ecuación $S'(r) = 0$:

$$S'(r) = \frac{1}{4}\left(3r^2 + 8 - \frac{16}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow 3r^4 + 8r^2 - 16 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 16}}{6} =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-8 \pm 16}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{6} \\ \frac{-24}{6} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{3} \\ -4 \end{array} \right. \Rightarrow r = \left\{ \begin{array}{l} \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \\ \pm\sqrt{-4} \to \text{sin solución} \end{array} \right.$$

Como se pide $r > 0$, la única posibilidad es $r = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Comprobamos que la función $S(r)$ tiene un mínimo para ese valor:

$$S''(r) = \frac{1}{4}\left(6r + \frac{32}{r^3}\right) \Rightarrow S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow \text{S tiene un mínimo en } \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $r = 1.155$

b) Necesitamos la ecuación de la recta t, tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa 1.

La ordenada del punto de contacto es $y = 4 - 1^2 = 3$.

La pendiente es $y'_{x=1} = -2$.

Por tanto la ecuación de t es $y - 3 = -2(x - 1)$, que dejamos como $y = -2x + 5$.

La recta t y la parábola se cortan en $x = 1$, luego la superficie pedida es

$$\int_0^1 \left(-2x + 5 - (4 - x^2)\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \left.\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$\boxed{\text{Solución}}$ La superficie es $0.3333\ u^2$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

a) Para saber si la matriz A tiene inversa calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A^t) = -\operatorname{adj}(A^t)$$

Calculamos la matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\operatorname{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Averiguamos cómo calcular X:

$$AX = BA \overset{(1)}{\Longrightarrow} A^{-1}(AX) = A^{-1}(BA) \overset{(2)}{\Longrightarrow} (A^{-1}A)X = A^{-1}(BA) \overset{(3)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} IX = A^{-1}(BA) \overset{(4)}{\Longrightarrow} X = A^{-1}(BA)$$

(1) $\rightarrow$ Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}
(2) $\rightarrow$ El producto de matrices es asociativo
(3) $\rightarrow$ Definición de matriz inversa, siendo I la matriz identidad
(4) $\rightarrow$ Definición de matriz identidad

Solo queda hacer las operaciones:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Sea la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Para cada número real λ definimos la matriz $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (0,5 puntos) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $B\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ para los diferentes valores de λ.

a) Calculamos el determinante de B:

$$|B| = |A - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1$$

Resolvemos la ecuación $|B| = 0$:

$$|B| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$

b) Hay que resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1$ entonces $|B| \neq 0$ luego $\text{rg}(B) = 2$ y el sistema es homogéneo compatible determinado, así que su única solución es la trivial $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$

Si $\lambda = -1$ el sistema es $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\{x - y = 0$, cuya solución es $\left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = \mu \end{array} \right.$ con $\mu \in \mathbf{R}$

Si $\lambda = 1$ el sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\{x - 3y = 0$, cuya solución es $\left\{ \begin{array}{l} x = 3\mu \\ y = \mu \end{array} \right.$ con $\mu \in \mathbf{R}$

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

a) (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

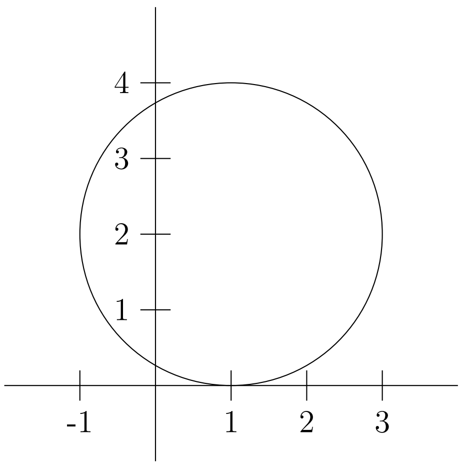
b) (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

c) (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

a) Transformamos la ecuación de la circunferencia para obtener el centro y el radio:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

El centro es el punto $C = (1, 2)$ y el radio es $R = 2$



b) Sustituimos $x = 0$ en la ecuación de la circunferencia para obtener la ordenada:

$$x = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow (y - 2)^2 = 3 \Rightarrow y - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{3}$$

El punto más alejado del origen tendrá ordenada $y = 2 + \sqrt{3}$, luego es $A = (0, 2 + \sqrt{3})$

La pendiente de la recta que une los puntos A y C es $m_{AC} = \dfrac{2 + \sqrt{3} - 2}{0 - 1} = -\sqrt{3}$, luego la recta t tangente a la circunferencia en el punto A, por ser perpendicular a la recta que pasa por A y C, tiene pendiente $m_t = \dfrac{-1}{m_{AC}} = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Como ya tenemos la pendiente y la ordenada en el origen de t, $t \equiv y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 2 + \sqrt{3}$

c) Las tangentes pedidas son el eje de abscisas $t_1 \equiv y = 0$ y la recta vertical $t_2 \equiv x = 3$, ya que ambas rectas verifican que su distancia hasta el punto C, centro de la circunferencia, es igual a 2, el radio.

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$.

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ $(p > 0)$ vale $\frac{1}{9}$, calcular el valor de p.

a) $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$, f no es par ni impar, es continua por ser producto y composición de funciones continuas. Calculamos los puntos de corte con los ejes:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \rightarrow (0,0) \in \mathrm{Graf}(f)$$

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow xe^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0) \in \mathrm{Graf}(f)$$

f no tiene asíntotas verticales por ser continua.

Estudiamos el comportamiento cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{3x} = \infty \rightarrow f \text{ no tiene asíntota horizontal por la derecha}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{3x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{3x} = \infty \rightarrow f \text{ no tiene asíntota oblicua por la derecha}$$

Estudiamos el comportamiento cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{la recta } y = 0 \text{ es asíntota horizontal por la izquierda}$$

Calculamos las coordenadas de los extremos relativos:

$$f(x) = xe^{3x} \Rightarrow f'(x) = 1e^{3x} + x3e^{3x} = (3x+1)e^{3x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (3x+1)e^{3x} = 0 \Rightarrow 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = (3x+1)e^{3x} = 0 \Rightarrow f''(x) = 3e^{3x} + (3x+1)3e^{3x} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}e^{-1}$$

f tiene un mínimo relativo en el punto (-0.33,-0.12)

Calculamos las coordenadas de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3e^{3x} + (3x+1)3e^{3x} = (3+9x+3)e^{3x} = (9x+6)e^{3x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (9x+6)e^{3x} = 0 \Rightarrow 9x+6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

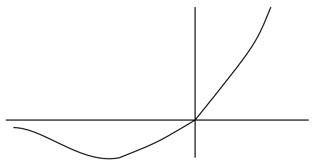
$$f''(x) = (9x+6)e^{3x} = 0 \Rightarrow f'''(x) = 9e^{3x} + (9x+6)3e^{3x} \Rightarrow f'''\left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión } x = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}e^{3\left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{2}{3}e^{-2}$$

f tiene un punto de inflexión en el punto (-0.67,-0.09)

Al estar el mínimo relativo y el punto de inflexión tan próximos entre sí y al eje de abscisas, la representación gráfica debe ser aproximada:



b) Ya que la gráfica de f no corta al eje de abscisas en ningún punto entre 0 y p, el área de la región se calcula como $\int_0^p f$.

Calculamos una primitiva de f usando el método de integración por partes:

$$\int xe^{3x}dx \overset{(1)}{=} x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$$

$$(1) \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right.$$

Calculamos la integral definida:

$$\int_0^p f = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}\Big]_0^p = \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} - \left(\frac{0}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{0} = \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} + \frac{1}{9}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\int_0^p f = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad p = \frac{1}{3}$