

Opción A. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

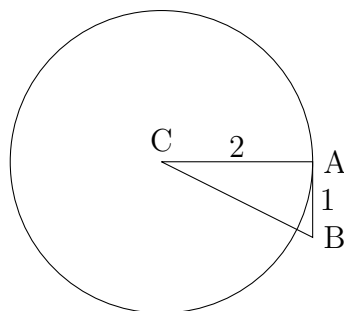
Se considera una varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

- a) (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.
- b) (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

a) Encontramos el centro y el radio de la circunferencia dada:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

El centro es $C = (2, 1)$ y el radio es $R = 2$



El triángulo ABC es rectángulo en A , de modo que $d(B, C) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Solución El punto B describe la circunferencia de centro el punto $(2, 1)$ y radio $\sqrt{5}$

b) La ecuación de la circunferencia de centro el punto $(2, 1)$ y radio $\sqrt{5}$ es

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Solución $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

$$\text{Sean las rectas } r : \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a .
 b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$.

- a) Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones implícitas de r obtenemos sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 6z = 1 \\ y = -x \end{cases} \quad z = \frac{1 - 3x}{-6} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

De la ecuación de r se obtiene un punto $P_r = (0, 0, -\frac{1}{6})$ y su vector de dirección $(1, -1, \frac{1}{2})$, aunque es más cómodo tomar su múltiplo $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$.

De la ecuación de s se obtiene un punto $P_s = (0, 1, 0)$ y su vector de dirección $\vec{v}_s = (2, a, 1)$.

Para que los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s sean proporcionales debe ocurrir $\frac{2}{2} = \frac{-2}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow a = -2$

Si $a = -2$, como $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

Si $a \neq -2$, calculamos el producto mixto $[6\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$:

$$[6\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 12 + 2a + 4 - 12 = 2a + 4 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

Solución Si $a = -2$, son paralelas; si $a \neq -2$, se cruzan.

b) $d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_sP_r}|}{|\vec{v}_s|}$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_sP_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2 \right) \Rightarrow d(r, s) = \frac{|(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2)|}{|(2, -2, 1)|} = \frac{\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + 4}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{53}{9}}}{3} = \sqrt{53} = 7.280u$$

Solución 7.280u

Opción A. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

- a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($\det(A) \neq 0$) y expresar A^{-1} en función de A e I .
- b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$.
- c) (1 punto) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k .

a) Suponemos que $|A| = 0$ y llegaremos a una contradicción, lo que demostrará que $|A| \neq 0$:

$$\begin{aligned} A^2 + 2A = I &\stackrel{(1)}{\implies} AA + 2IA = I \stackrel{(2)}{\implies} (A + 2I)A = I \stackrel{(3)}{\implies} \det((A + 2I)A) = \det(I) \stackrel{(4)}{\implies} \\ &\stackrel{(4)}{\implies} \det(A + 2I) \det(A) = 1 \stackrel{(5)}{\implies} \det(A + 2I) \cdot 0 = 1 \stackrel{(6)}{\implies} 0 = 1 \rightarrow \text{contradicción} \end{aligned}$$

(1) \rightarrow Definición de cuadrado y de I

(2) \rightarrow El producto de matrices es distributivo respecto a la suma

(3) \rightarrow Dos matrices iguales tienen el mismo determinante

(4) \rightarrow El determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes

(4) \rightarrow Sabemos que $\det(I) = 1$

(5) \rightarrow Estamos suponiendo que $\det(A) = 0$

(6) \rightarrow Cualquier número multiplicado por 0 da 0

Trasformamos la expresión que da el enunciado para llegar al valor de A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^2 + 2A = I &\stackrel{(1)}{\implies} I = AA + 2A \stackrel{(2)}{\implies} IA^{-1} = (AA + 2A)A^{-1} \stackrel{(3)}{\implies} \\ &\stackrel{(3)}{\implies} A^{-1} = (AA)A^{-1} + 2AA^{-1} \stackrel{(4)}{=} A(AA^{-1}) + 2I \stackrel{(5)}{=} AI + 2I \stackrel{(6)}{=} A + 2I \end{aligned}$$

(1) \rightarrow Definición de cuadrado

(2) \rightarrow Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}

(3) y (6) \rightarrow Definición de I

(3) \rightarrow El producto de matrices es distributivo respecto a la suma

(4) \rightarrow El producto de matrices es asociativo

(4) y (5) \rightarrow Definición de matriz inversa

Solución	$ A \neq 0$ y $A^{-1} = A + 2I$
----------	----------------------------------

b) Trasformamos la expresión que da el enunciado para llegar al valor de A^3 :

$$\begin{aligned} A^2 + 2A = I &\implies A^2 = I - 2A \implies A^3 = (I - 2A)A = A - 2A^2 = A - 2(I - 2A) = \\ &= A - 2I + 4A = -2I + 5A \end{aligned}$$

Solución	$p = -2$ y $q = 5$
----------	--------------------

c) Sustituimos en la expresión del enunciado las matrices por sus valores:

$$\begin{aligned} A^2 + 2A = I &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1+k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & 1+k^2+2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

k debe ser solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ k + 2 = 0 \\ k + 2 = 0 \\ 1 + k^2 + 2k = 1 \end{cases}$$

Evidentemente, $k = -2$ verifica las cuatro ecuaciones.

Solución $k = -2$

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r > 0$.

- a) (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
 b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x = 1$, y el eje vertical.

- a) Necesitamos la ecuación de la recta t , tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa r . La ordenada del punto de contacto es $y = 4 - r^2$. La pendiente es $y'_{x=r}$:

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x \Rightarrow y'_{x=r} = -2r$$

Por tanto la ecuación de t es $y - (4 - r^2) = -2r(x - r)$

Cortando la recta t con los dos ejes de coordenadas calculamos las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo $T(r)$, que llamaremos x_r e y_r :

$$(x_r, 0) \in t \Rightarrow -(4 - r^2) = -2r(x_r - r) \Rightarrow \frac{4 - r^2}{2r} = x_r - r \Rightarrow x_r = \frac{2}{r} + \frac{r}{2}$$

$$(0, y_r) \in t \Rightarrow y_r - (4 - r^2) = -2r(-r) \Rightarrow y_r = r^2 + 4$$

La superficie del triángulo $T(r)$ es

$$S(r) = \frac{1}{2}x_r y_r = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r} + \frac{r}{2} \right) (r^2 + 4) = \frac{1}{2} \left(2r + \frac{8}{r} + \frac{r^3}{2} + 2r \right) = \frac{1}{4} \left(r^3 + 8r + \frac{16}{r} \right)$$

Calculamos el mínimo de $S(r)$ resolviendo la ecuación $S'(r) = 0$:

$$\begin{aligned} S'(r) &= \frac{1}{4} \left(3r^2 + 8 - \frac{16}{r^2} \right) = 0 \Rightarrow 3r^4 + 8r^2 - 16 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 16}}{6} = \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-8 \pm 16}{6} = \left\{ \frac{8}{6} \right. = \left\{ \frac{4}{3} \right. \Rightarrow r = \left\{ \begin{array}{l} \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \\ \pm \sqrt{-4} \end{array} \right. \rightarrow \text{sin solución} \end{aligned}$$

Como se pide $r > 0$, la única posibilidad es $r = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Comprobamos que la función $S(r)$ tiene un mínimo para ese valor:

$$S''(r) = \frac{1}{4} \left(6r + \frac{32}{r^3} \right) \Rightarrow S'' \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) > 0 \Rightarrow S \text{ tiene un mínimo en } \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$$

Solución $r = 1.155$

b) Necesitamos la ecuación de la recta t , tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa 1.

La ordenada del punto de contacto es $y = 4 - 1^2 = 3$.

La pendiente es $y'_{x=1} = -2$.

Por tanto la ecuación de t es $y - 3 = -2(x - 1)$, que dejamos como $y = -2x + 5$.

La recta t y la parábola se cortan en $x = 1$, luego la superficie pedida es

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2)) dx &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} = 0.3333 \end{aligned}$$

Solución

 La superficie es $0.3333 u^2$

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

$$\text{Sean las matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1} .

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

a) Para saber si la matriz A tiene inversa calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A^t) = -\text{adj}(A^t)$$

Calculamos la matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
----------	--

b) Averiguamos cómo calcular X :

$$AX = BA \xrightarrow{(1)} A^{-1}(AX) = A^{-1}(BA) \xrightarrow{(2)} (A^{-1}A)X = A^{-1}(BA) \xrightarrow{(3)} \\ \xrightarrow{(3)} IX = A^{-1}(BA) \xrightarrow{(4)} X = A^{-1}(BA)$$

(1) \rightarrow Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}

(2) \rightarrow El producto de matrices es asociativo

(3) \rightarrow Definición de matriz inversa, siendo I la matriz identidad

(4) \rightarrow Definición de matriz identidad

Solo queda hacer las operaciones:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Solución}} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Para cada número real λ definimos la matriz $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2 .

a) (0,5 puntos) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ .

a) Calculamos el determinante de B :

$$|B| = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1$$

Resolvemos la ecuación $|B| = 0$:

$$|B| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Solución $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$

b) Hay que resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1$ entonces $|B| \neq 0$ luego $\text{rg}(B) = 2$ y el sistema es homogéneo compatible determinado, así que su única solución es la trivial $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Si $\lambda = -1$ el sistema es $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\{x - y = 0\}$, cuya solución es $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \end{cases}$ con $\mu \in \mathbf{R}$

Si $\lambda = 1$ el sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\{x - 3y = 0\}$, cuya solución es $\begin{cases} x = 3\mu \\ y = \mu \end{cases}$ con $\mu \in \mathbf{R}$

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

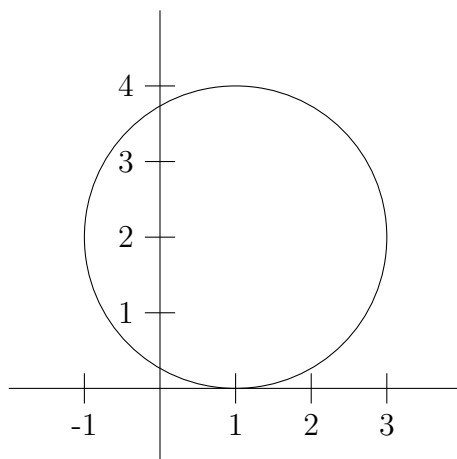
Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

- (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.
- (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abscisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.
- (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

a) Transformamos la ecuación de la circunferencia para obtener el centro y el radio:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

El centro es el punto $C = (1, 2)$ y el radio es $R = 2$



b) Sustituimos $x = 0$ en la ecuación de la circunferencia para obtener la ordenada:

$$x = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow (y - 2)^2 = 3 \Rightarrow y - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{3}$$

El punto más alejado del origen tendrá ordenada $y = 2 + \sqrt{3}$, luego es $A = (0, 2 + \sqrt{3})$

La pendiente de la recta que une los puntos A y C es $m_{AC} = \frac{2 + \sqrt{3} - 2}{0 - 1} = -\sqrt{3}$, luego la recta t tangente a la circunferencia en el punto A , por ser perpendicular a la recta que pasa por A y C , tiene pendiente $m_t = \frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Como ya tenemos la pendiente y la ordenada en el origen de t , $t \equiv y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2 + \sqrt{3}$

c) Las tangentes pedidas son el eje de abscisas $t_1 \equiv y = 0$ y la recta vertical $t_2 \equiv x = 3$, ya que ambas rectas verifican que su distancia hasta el punto C , centro de la circunferencia, es igual a 2, el radio.

PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$.

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f .

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $\frac{1}{9}$, calcular el valor de p .

a) $D(f) = \mathbf{R}$, f no es par ni impar, es continua por ser producto y composición de funciones continuas. Calculamos los puntos de corte con los ejes:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \in \text{Graf}(f)$$

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow xe^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0) \in \text{Graf}(f)$$

f no tiene asíntotas verticales por ser continua.

Estudiamos el comportamiento cuando $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{3x} = \infty \rightarrow f \text{ no tiene asíntota horizontal por la derecha}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{3x} = \infty \rightarrow f \text{ no tiene asíntota oblicua por la derecha}$$

Estudiamos el comportamiento cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \rightarrow$$

\rightarrow la recta $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda

Calculamos las coordenadas de los extremos relativos:

$$f(x) = xe^{3x} \Rightarrow f'(x) = 1e^{3x} + x3e^{3x} = (3x + 1)e^{3x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (3x + 1)e^{3x} = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = (3x + 1)e^{3x} = 0 \Rightarrow f''(x) = 3e^{3x} + (3x + 1)3e^{3x} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{3}$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}e^{-1}$$

f tiene un mínimo relativo en el punto $(-0.33, -0.12)$

Calculamos las coordenadas de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3e^{3x} + (3x + 1)3e^{3x} = (3 + 9x + 3)e^{3x} = (9x + 6)e^{3x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (9x + 6)e^{3x} = 0 \Rightarrow 9x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

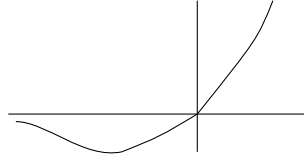
$$f''(x) = (9x + 6)e^{3x} = 0 \Rightarrow f'''(x) = 9e^{3x} + (9x + 6)3e^{3x} \Rightarrow f''' \left(-\frac{2}{3} \right) \neq 0 \rightarrow$$

$\rightarrow f$ tiene un punto de inflexión $x = -\frac{2}{3}$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = f \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3} e^{3 \left(-\frac{2}{3} \right)} = -\frac{2}{3} e^{-2}$$

f tiene un punto de inflexión en el punto $(-0.67, -0.09)$

Al estar el mínimo relativo y el punto de inflexión tan próximos entre sí y al eje de abscisas, la representación gráfica debe ser aproximada:



b) Ya que la gráfica de f no corta al eje de abscisas en ningún punto entre 0 y p , el área de la región se calcula como $\int_0^p f$.

Calculamos una primitiva de f usando el método de integración por partes:

$$\int x e^{3x} dx \stackrel{(1)}{=} x \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3x}$$

$$(1) \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{cases}$$

Calculamos la integral definida:

$$\int_0^p f = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3x} \Big|_0^p = \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} - \left(\frac{0}{3} - \frac{1}{9} \right) e^0 = \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} + \frac{1}{9}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\int_0^p f = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9} \right) e^{3p} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Solución	$p = \frac{1}{3}$
----------	-------------------