PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$.

a) (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ $(p > 0)$ vale $\frac{1}{9}$, calcular el valor de p.

a) $\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$, f no es par ni impar, es continua por ser producto y composición de funciones continuas. Calculamos los puntos de corte con los ejes:

$$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \to (0,0) \in \mathrm{Graf}(f)$$

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow xe^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0 \to (0,0) \in \mathrm{Graf}(f)$$

f no tiene asíntotas verticales por ser continua.

Estudiamos el comportamiento cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{3x} = \infty \to f \text{ no tiene asíntota horizontal por la derecha}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{3x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{3x} = \infty \to f \text{ no tiene asíntota oblicua por la derecha}$$

Estudiamos el comportamiento cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-3e^{-3x}} = 0 \to$$

$$\to \text{la recta } y = 0 \text{ es asíntota horizontal por la izquierda}$$

Calculamos las coordenadas de los extremos relativos:

$$f(x) = xe^{3x} \Rightarrow f'(x) = 1e^{3x} + x3e^{3x} = (3x+1)e^{3x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (3x+1)e^{3x} = 0 \Rightarrow 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) = (3x+1)e^{3x} = 0 \Rightarrow f''(x) = 3e^{3x} + (3x+1)3e^{3x} \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) > 0 \to$$

$$\to f \text{ tiene un mínimo relativo en } x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}e^{-1}$$

f tiene un mínimo relativo en el punto (-0.33,-0.12)

Calculamos las coordenadas de los puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3e^{3x} + (3x+1)3e^{3x} = (3+9x+3)e^{3x} = (9x+6)e^{3x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (9x+6)e^{3x} = 0 \Rightarrow 9x+6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

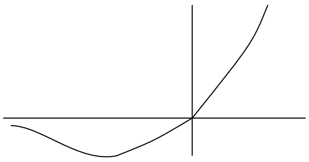
$$f''(x) = (9x+6)e^{3x} = 0 \Rightarrow f'''(x) = 9e^{3x} + (9x+6)3e^{3x} \Rightarrow f'''\left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow f \text{ tiene un punto de inflexión } x = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}e^{3\left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{2}{3}e^{-2}$$

f tiene un punto de inflexión en el punto (-0.67,-0.09)

Al estar el mínimo relativo y el punto de inflexión tan próximos entre sí y al eje de abscisas, la representación gráfica debe ser aproximada:



b) Ya que la gráfica de f no corta al eje de abscisas en ningún punto entre 0 y p, el área de la región se calcula como $\int_0^p f$.

Calculamos una primitiva de f usando el método de integración por partes:

$$\int xe^{3x}dx \overset{(1)}{=} x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$$

$$(1) \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right.$$

Calculamos la integral definida:

$$\int_0^p f = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}\Big]_0^p = \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} - \left(\frac{0}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{0} = \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} + \frac{1}{9}$$

Resolvemos la ecuación:

$$\int_0^p f = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3p} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \frac{p}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Solución $\quad p = \frac{1}{3}$