PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

Sea la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Para cada número real λ definimos la matriz $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (0,5 puntos) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $B \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ para los diferentes valores de λ.

a) Calculamos el determinante de B:

$$|B| = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1$$

Resolvemos la ecuación $|B| = 0$:

$$|B| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$

b) Hay que resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 1$ entonces $|B| \neq 0$ luego $\mathrm{rg}(B) = 2$ y el sistema es homogéneo compatible determinado, así que su única solución es la trivial $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$

Si $\lambda = -1$ el sistema es $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\{x - y = 0$, cuya solución es $\left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = \mu \end{array} \right.$ con $\mu \in \mathbf{R}$

Si $\lambda = 1$ el sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\{x - 3y = 0$, cuya solución es $\left\{ \begin{array}{l} x = 3\mu \\ y = \mu \end{array} \right.$ con $\mu \in \mathbf{R}$