PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen modelo.

Opción B. Ejercicio 1. Valor: 2 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

a) Para saber si la matriz A tiene inversa calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A^t) = -\,\mathrm{adj}(A^t)$$

Calculamos la matriz inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\,\mathrm{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Averiguamos cómo calcular X:

$$AX = BA \overset{(1)}{\Longrightarrow} A^{-1}(AX) = A^{-1}(BA) \overset{(2)}{\Longrightarrow} (A^{-1}A)X = A^{-1}(BA) \overset{(3)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} IX = A^{-1}(BA) \overset{(4)}{\Longrightarrow} X = A^{-1}(BA)$$

(1) $\rightarrow$ Multiplicamos por la izquierda por A^{-1}
(2) $\rightarrow$ El producto de matrices es asociativo
(3) $\rightarrow$ Definición de matriz inversa, siendo I la matriz identidad
(4) $\rightarrow$ Definición de matriz identidad

Solo queda hacer las operaciones:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$