

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Dada la parábola  $y = 4 - x^2$ , se considera el triángulo rectángulo  $T(r)$  formado por los ejes coordenados y la tangente a la parábola en el punto de abscisa  $x = r > 0$ .

- a) (2 puntos) Hallar  $r$  para que  $T(r)$  tenga área mínima.  
 b) (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa  $x = 1$ , y el eje vertical.

- a) Necesitamos la ecuación de la recta  $t$ , tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa  $r$ . La ordenada del punto de contacto es  $y = 4 - r^2$ . La pendiente es  $y'_{x=r}$ :

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow y' = -2x \Rightarrow y'_{x=r} = -2r$$

Por tanto la ecuación de  $t$  es  $y - (4 - r^2) = -2r(x - r)$

Cortando la recta  $t$  con los dos ejes de coordenadas calculamos las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo  $T(r)$ , que llamaremos  $x_r$  e  $y_r$ :

$$(x_r, 0) \in t \Rightarrow -(4 - r^2) = -2r(x_r - r) \Rightarrow \frac{4 - r^2}{2r} = x_r - r \Rightarrow x_r = \frac{2}{r} + \frac{r}{2}$$

$$(0, y_r) \in t \Rightarrow y_r - (4 - r^2) = -2r(-r) \Rightarrow y_r = r^2 + 4$$

La superficie del triángulo  $T(r)$  es

$$S(r) = \frac{1}{2}x_r y_r = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{r} + \frac{r}{2} \right) (r^2 + 4) = \frac{1}{2} \left( 2r + \frac{8}{r} + \frac{r^3}{2} + 2r \right) = \frac{1}{4} \left( r^3 + 8r + \frac{16}{r} \right)$$

Calculamos el mínimo de  $S(r)$  resolviendo la ecuación  $S'(r) = 0$ :

$$\begin{aligned} S'(r) &= \frac{1}{4} \left( 3r^2 + 8 - \frac{16}{r^2} \right) = 0 \Rightarrow 3r^4 + 8r^2 - 16 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 16}}{6} = \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{-8 \pm 16}{6} = \left\{ \frac{8}{6} \right. = \left\{ \frac{4}{3} \right. \Rightarrow r = \left\{ \begin{array}{l} \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \\ \pm \sqrt{-4} \rightarrow \text{sin solución} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Como se pide  $r > 0$ , la única posibilidad es  $r = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Comprobamos que la función  $S(r)$  tiene un mínimo para ese valor:

$$S''(r) = \frac{1}{4} \left( 6r + \frac{32}{r^3} \right) \Rightarrow S'' \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) > 0 \Rightarrow S \text{ tiene un mínimo en } \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$$

Solución  $r = 1.155$

b) Necesitamos la ecuación de la recta  $t$ , tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa 1.

La ordenada del punto de contacto es  $y = 4 - 1^2 = 3$ .

La pendiente es  $y'_{x=1} = -2$ .

Por tanto la ecuación de  $t$  es  $y - 3 = -2(x - 1)$ , que dejamos como  $y = -2x + 5$ .

La recta  $t$  y la parábola se cortan en  $x = 1$ , luego la superficie pedida es

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2)) dx &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3} = 0.3333 \end{aligned}$$

Solución La superficie es  $0.3333 u^2$