

Opción A. Ejercicio 2. Valor: 2 puntos.

$$\text{Sean las rectas } r : \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determinar la posición relativa de  $r$  y  $s$  según los valores de  $a$ .  
 b) (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$  cuando  $a = -2$ .

- a) Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones implícitas de  $r$  obtenemos sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 6z = 1 \\ y = -x \end{cases} \quad z = \frac{1 - 3x}{-6} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

De la ecuación de  $r$  se obtiene un punto  $P_r = (0, 0, -\frac{1}{6})$  y su vector de dirección  $(1, -1, \frac{1}{2})$ , aunque es más cómodo tomar su múltiplo  $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$ .

De la ecuación de  $s$  se obtiene un punto  $P_s = (0, 1, 0)$  y su vector de dirección  $\vec{v}_s = (2, a, 1)$ .

Para que los vectores  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$  sean proporcionales debe ocurrir  $\frac{2}{2} = \frac{-2}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow a = -2$

Si  $a = -2$ , como  $P_s \notin r$ , las rectas son paralelas.

Si  $a \neq -2$ , calculamos el producto mixto  $[6\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]$ :

$$[6\overrightarrow{P_sP_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 12 + 2a + 4 - 12 = 2a + 4 \neq 0 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan}$$

**Solución** Si  $a = -2$ , son paralelas; si  $a \neq -2$ , se cruzan.

b)  $d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_sP_r}|}{|\vec{v}_s|}$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_sP_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \left( \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2 \right) \Rightarrow d(r, s) = \frac{|(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2)|}{|(2, -2, 1)|} = \frac{\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + 4}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{53}{9}}}{3} = \sqrt{53} = 7.280u$$

**Solución** 7.280u