PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción B. Ejercicio 3. Valor: 3 puntos.

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 2 \\ ax+y+2z & = & 0 \\ x-y+az & = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=-1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a=2$.

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son $A|A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right)$

$\text{rg}(A) \geqslant 2$ ya que tiene un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Estudiamos cuándo puede ser $\text{rg}(A)=3$ resolviendo la ecuación $\det(A)=0$

$$\det(A) = a - 2 + 2 + a^2 = a^2 + a = 0 \Rightarrow a = \left\{\begin{array}{r} 0 \\ -1 \end{array}\right.$$

Caso $a \neq 0$ y $a \neq -1$. En este caso $\text{rg}(A)=3$, luego también $\text{rg}(A^*)=3$, así que el sistema es no homogéneo, compatible determinado.

Caso $a=0$. En este caso $\text{rg}(A)=2$ y vemos si el menor de orden 2 de A se puede ampliar usando la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2+4 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

En este caso el sistema es no homogéneo e incompatible.

Caso $a=-1$. En este caso $\text{rg}(A)=2$ y vemos si el menor de orden 2 de A se puede ampliar usando la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-2+4 = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

En este caso el sistema es no homogéneo, compatible indeterminado

b) Para $a=-1$ el sistema es equivalente al siguiente, que resolvemos dejando y y z en función de x.

$$\left\{\begin{array}{rrcr} -y & & = & -x+2 \\ y & +2z & = & x \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} y=x-2 \\ 2z=2 \Rightarrow z=1 \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda-2 \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \\ z=1 \end{array}\right.$

c) Para $a=2$ el sistema es de Cramer y $\det(A)=2^2+2=6$; lo resolvemos usando la regla de Cramer.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-2+4=6 \Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\det(A)}=\frac{6}{6}=1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-2-8=-6 \Rightarrow x=\frac{\Delta_y}{\det(A)}=\frac{-6}{6}=-1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-4-2+2=-3 \Rightarrow x=\frac{\Delta_z}{\det(A)}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Solución}}$ $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$