PAU Madrid. Matemáticas II. Año 2002. Examen de junio.

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

a) Para calcular las abscisas de los puntos de inflexión igualamos a cero la derivada segunda y resolvemos la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2(x^2+3)^2 - 2x2(x^2+3)2x}{(x^2+3)^4} =$$

$$= \frac{8x^2 - 2(x^2+3)}{(x^2+3)^3} = \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}; f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

La solución $x = -1$ no es válida por no ser positiva, así que hay que comprobar si en $x = 1$ hay un punto de inflexión:

$$f'''(x) = \frac{12x(x^2+3)^3 - (6x^2-6)3(x^2+3)^2 2x}{(x^2+3)^6} \Rightarrow f'''(1) \neq 0$$

Luego f tiene un punto de inflexión en $x = 1$; el valor de la ordenada es $y = f(1) = \frac{1}{4}$

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$

La recta pendiente tiene ecuación $t \equiv y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Rightarrow t \equiv y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

$\boxed{\text{Solución}}$ La recta tangente pedida tiene ecuación $t \equiv y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

b) La recta t y la gráfica de f se cortan en $x = 1$, luego la superficie pedida es

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2 + 1}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,01020$$

$\boxed{\text{Solución}}$ El área pedida es 0,01020 u^2