

Opción A. Ejercicio 4. Valor: 3 puntos.

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$

- a) (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f .
- b) (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f , la recta anterior y el eje $x = 0$.

- a) Para calcular las abscisas de los puntos de inflexión igualamos a cero la derivada segunda y resolvemos la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2(x^2 + 3)^2 - 2x \cdot 2(x^2 + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^4} =$$

$$= \frac{8x^2 - 2(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^3} = \frac{6x^2 - 6}{(x^2 + 3)^3}; f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

La solución $x = -1$ no es válida por no ser positiva, así que hay que comprobar si en $x = 1$ hay un punto de inflexión:

$$f'''(x) = \frac{12x(x^2 + 3)^3 - (6x^2 - 6)3(x^2 + 3)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^6} \Rightarrow f'''(1) \neq 0$$

Luego f tiene un punto de inflexión en $x = 1$; el valor de la ordenada es $y = f(1) = \frac{1}{4}$

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$

La recta pendiente tiene ecuación $t \equiv y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x - 1) \Rightarrow t \equiv y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

Solución La recta tangente pedida tiene ecuación $t \equiv y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

- b) La recta t y la gráfica de f se cortan en $x = 1$, luego la superficie pedida es

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} - \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,01020$$

Solución El área pedida es $0,01020 \text{ u}^2$