Valores exactos de razones trigonométricas con fracciones y radicales

Conocemos de modo exacto el valor de una razón trigonométrica utilizando radicales o fracciones irreducibles y necesitamos averiguar el valor de otra razón trigonométrica, también usando radicales y fracciones irreducibles si es necesario.

Para conseguirlo, utilizaremos las identidades trigonométricas que relacionan unas razones con otras, en el orden que mejor nos parezca. Suele haber varias posibilidades para llegar correctamente al resultado, así que procuramos buscar la que parezca más sencilla. Y, desde luego, se pueden hacer las operaciones en muchos órdenes diferentes, será tu gusto el que determine cómo hacerlo.

Es costumbre en estos problemas dar el resultado final del modo más sencillo posible y sin que aparezcan radicales en el denominador, luego puede ser necesario simplificar radicales y racionalizar.

Enunciado

Si α es un ángulo agudo y $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, calcula de modo exacto las demás razones trigonométricas.

Resolución

El cálculo de la cotangente es inmediato, pero exige una racionalización:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

La tangente y la secante están relacionadas:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$$

Como α es un ángulo agudo, todas sus razones trigonométricas son positivas, de modo que continuamos la operación con el signo «más»:

$\sec\alpha = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{4\cdot 2 + 1} = 3$. Por tanto, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{3}$.

Hay varias posibilidades para calcular ahora el valor del seno. Mostramos la que nos parece más sencilla:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = (\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha) = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Solo falta la cosecante:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Solución

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$; $\sec\alpha = 3$; $\csc\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$