Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Las seis razones trigonométricas de un ángulo agudo están tan relacionadas entre sí que, conocida cualquiera de ellas, es posible averiguar las otras cinco. Esto es importante tanto a nivel práctico, para resolver problemas, como a nivel teórico, para desarrollar nuevas teorías.

Valores exactos con fracciones y radicales

Conocemos de modo exacto el valor de una razón trigonométrica utilizando radicales o fracciones irreducibles y necesitamos averiguar el valor de otra razón trigonométrica, también usando radicales y fracciones irreducibles si es necesario.

Para conseguirlo, utilizaremos las identidades trigonométricas que relacionan unas razones con otras, en el orden que mejor nos parezca. Es costumbre en estos problemas dar el resultado final del modo más sencillo posible y sin que aparezcan radicales en el denominador, luego puede ser necesario simplificar radicales y racionalizar.

Enunciado

Si α es un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, calcula de modo exacto las demás razones trigonométricas.

Resolución

El cálculo de la cosecante es inmediato, pero exige una racionalización:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Usamos la relación pitagórica para calcular el coseno:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Como α es un ángulo agudo, todas sus razones trigonométricas son positivas, de modo que continuamos la operación con el signo «más»:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Calculamos la cosecante a partir de alguna de las expresiones del coseno, la que más nos convenga:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

La tangente se puede calcular ahora que conocemos el seno y el coseno:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$. Por tanto, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Solución

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2};\ \sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2};\ \csc\alpha = \sqrt{5};\ \operatorname{ctg}\alpha = 2$$

