Consecuencias de la relación pitagórica

A partir de la relación pitagórica se deducen varias expresiones útiles, de uso muy común. Vemos algunas.

Obtener $\text{sen}^2\alpha$ conocido $\cos^2\alpha$

$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

Obtener $\cos^2\alpha$ conocido $\text{sen}^2\alpha$

$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1-\text{sen}^2\alpha$

Relacionar $\text{tg}^2\alpha$ y $\sec^2\alpha$

$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{tg}^2\alpha+1 = \sec^2\alpha$

Demostración

Dividimos la relación pitagórica entre $\cos^2\alpha$:

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}^2\alpha+1 = \sec^2\alpha$$

Observación

Te desarrollamos detenidamente las divisiones con potencias de razones trigonométricas que hemos realizado porque es algo que se hace muy a menudo y conviene hacerlo con rapidez:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(\text{sen}\,\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{(\text{sen}\,\alpha)(\text{sen}\,\alpha)}{(\cos\alpha)(\cos\alpha)} = (\text{tg}\,\alpha)(\text{tg}\,\alpha) = (\text{tg}\,\alpha)^2 = \text{tg}^2\alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{(\cos\alpha)(\cos\alpha)} = (\sec\alpha)(\sec\alpha) = (\sec\alpha)^2 = \sec^2\alpha$$

Relacionar $\text{ctg}^2\alpha$ y $\csc^2\alpha$

$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 1+\text{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$

Demostración

Dividimos la relación pitagórica entre $\text{sen}^2\alpha$:

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow 1+\text{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Resumen

Hemos obtenido a partir de la relación pitagórica cuatro identidades trigonométricas más:

$\text{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$	$\cos^2\alpha = 1-\text{sen}^2\alpha$	$\text{tg}^2\alpha+1 = \sec^2\alpha$	$1+\text{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$

De todas ellas, la más importante es la tercera, ya que las dos primeras son muy obvias y la cuarta se usa menos.

Técnicas

También hemos aprendido dos técnicas importantes:

- ✱ Si α es un ángulo agudo, cualquier identidad trigonométrica se puede dividir entre $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ o alguna de sus potencias puesto que $\text{sen}\,\alpha \neq 0$ y $\cos\alpha \neq 0$
- ✱ Se pueden dividir potencias de razones trigonométricas expresadas con notación abreviada de una manera muy simple, sin desarrollarlas.

