## Rectas tangentes a una circunferencia por un punto exterior

Existen varios métodos puramente geométricos para resolver este problema que se pueden adaptar fácilmente para resolverlos mediante geometría analítica. Pero, como estamos estudiando precisamente geometría analítica, vamos a mostrarte un método que utiliza algún concepto nuevo de esta materia.

### Ejemplo

#### Enunciado

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto A y es tangente a la circunferencia «C». Datos: $A=(-14,31)$, $C\equiv(x-6)^2+(y-1)^2=130$.

#### Resolución

El centro de la circunferencia «C» es el punto $T=(6,1)$ y su radio mide $\sqrt{130}$.

Averiguamos la posición relativa de la circunferencia y el punto A:

$$d(A,T)=\sqrt{(6-(-14))^2+(1-31)^2}=\sqrt{20^2+(-30)^2}=\sqrt{1300}\Rightarrow \text{A es exterior a C.}$$

Llamamos $P=(x,y)$ al punto de tangencia de las rectas pedidas y la circunferencia (sabemos que obtendremos dos soluciones).

Por un lado, el punto debe verificar la ecuación de la circunferencia:

$$(x-6)^2+(y-1)^2=130\Rightarrow x^2-12x+36+y^2-2y+1=130\Rightarrow x^2+y^2-12x-2y=93$$

Por otro lado, el vector $\overrightarrow{AP}$ debe ser perpendicular al $\overrightarrow{TP}$:

$$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{TP}\Rightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{TP}=0\Rightarrow (x+14,y-31)\cdot(x-6,y-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+14)(x-6)+(y-31)(y-1)=0\Rightarrow x^2-6x+14x-84+y^2-y-31y+31=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+8x-32y=53.$$ (Por cierto, esta es la ecuación de una circunferencia).

Resolvemos el sistema, comenzando por restar las ecuaciones:

$$\begin{cases}x^2+y^2-12x-2y=93\\x^2+y^2+8x-32y=53\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-12x-2y=93\\-20x+30y=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-12x-2y=93\\-2x+3y=4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-12x-2y=93\\x=\dfrac{3y-4}{2}\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{3y-4}{2}\right)^2+y^2-12\cdot\frac{3y-4}{2}-2y=93\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{9y^2-24y+16}{4}+y^2-6\cdot(3y-4)-2y=93\Rightarrow$$

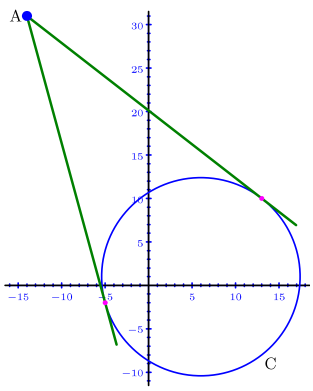
$$\Rightarrow 9y^2-24y+16+4y^2-72y+96-8y=372\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y^2-104y-260=0\Rightarrow y^2-8y-20=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1}=\frac{8\pm12}{2}=4\pm6=\begin{cases}10\\-2\end{cases}$$

$y=10\Rightarrow x=13\rightarrow$ punto $(13,10)$

$y=-2\Rightarrow x=-5\rightarrow$ punto $(-5,-2)$




Una de las rectas tangentes es la recta que pasa por A y (13,10); haciendo las operaciones correspondientes, vemos que su ecuación implícita es «$7x+9y-181=0$».

La otra recta tangente es la recta que pasa por A y (−5,−2); también con las operaciones correspondientes se obtiene la ecuación implícita «$11x+3y+61=0$».

Solución: «$7x+9y-181=0$» y «$11x+3y+61=0$»