Puntos de corte de dos circunferencias

Sabemos que el número de puntos de corte de dos circunferencias puede ser dos, uno o ninguno, según su posición relativa. Dadas las circunferencias en geometría analítica, deseamos averiguar las coordenadas de sus puntos de corte.

El método es plantear un sistema de ecuaciones no lineales usando las ecuaciones de las circunferencias; sus soluciones serán las coordenadas de los puntos de corte. La diferencia entre las ecuaciones de las circunferencias nos da la ecuación de la recta que pasa por los puntos de corte de las circunferencias, si existe.

Ejemplo

Enunciado

Calcula los puntos que pertenecen a las circunferencias «C» y «F».

Datos: $C \equiv (x+1)^2+(y-4)^2 = 29$, $F \equiv (x-13)^2+(y-10)^2 = 145$

Resolución

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de «C» y «F»:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-4)^2=29\\(x-13)^2+(y-10)^2=145\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+2x+1+y^2-8y+16=29\\x^2-26x+169+y^2-20y+100=145\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\x^2+y^2-26x-20y=-124\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\28x+12y=136\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\7x+3y=34\end{cases}$$

Hemos obtenido la ecuación «$7x+3y-34 = 0$», que es precisamente la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos de corte de las dos circunferencias.

Continuamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\7x+3y=34\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2+2x-8y=12\\y=\dfrac{34-7x}{3}\end{cases} \Rightarrow x^2+\left(\frac{34-7x}{3}\right)^2+2x-8\cdot\frac{34-7x}{3}=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{49x^2-476x+1156}{9}+2x-\frac{272-56x}{3}=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2+49x^2-476x+1156+18x-816+168x = 108 \Rightarrow 58x^2-290+232 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5x+4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} = \frac{5\pm3}{2} = \begin{cases}4\\1\end{cases}$$

$x = 4 \Rightarrow y = 2 \rightarrow$ punto (4,2); $x = 1 \Rightarrow y = 9 \rightarrow$ punto (1,9)

Solución: (4,2) y (1,9)

Representación gráfica

A la derecha la vemos.