Puntos de corte de una circunferencia y una recta

Sabemos que el número de puntos de corte de una recta y una circunferencia puede ser dos, uno o ninguno, según su posición relativa. Dadas la circunferencia y la recta en geometría analítica, deseamos averiguar las coordenadas de sus puntos de corte.

Hay dos métodos interesantes:

- Utilizar las ecuaciones paramétricas de la recta, sustituir su expresión en la ecuación de la circunferencia y despejar el valor del parámetro; sustituyendo el valor obtenido para el parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta, conocemos los puntos.
- Plantear un sistema de ecuaciones no lineales usando la ecuación de la circunferencia y la ecuación implícita de la recta; sus soluciones serán las coordenadas de los puntos de corte.

Ejemplo

Enunciado

Calcula los puntos que pertenecen a la circunferencia «C» y a la recta que pasa por los puntos A y B.

Datos: $A = (22,4)$, $B = (18,28)$, $C \equiv (x-4)^2+(y-1)^2 = 370$.

Resolución con las ecuaciones paramétricas

Llamamos «r» a la recta que pasa por A y B.

El vector $\overrightarrow{AB}$ es uno de los vectores de dirección de «r».

$$\overrightarrow{AB} = (18-22,28-4) = (-4,24) \Rightarrow \vec{v}_r = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}(-4,24) = (1,-6).$$

Así pues, $r \equiv \begin{cases} x=22+\lambda \\ y=4-6\lambda \end{cases}$

Sustituimos en la ecuación de «C»: $(22+\lambda-4)^2+(4-6\lambda-1)^2 = 370 \Rightarrow$

$\Rightarrow (18+\lambda)^2+(3-6\lambda)^2 = 370 \Rightarrow 324+36\lambda+\lambda^2+9-36\lambda+36\lambda^2 = 370 \Rightarrow 37\lambda^2 = 37 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow$

$\lambda = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$; $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x=21 \\ y=10 \end{cases} \rightarrow$ punto $(21,10)$; $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=23 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow$ punto $(23,-2)$

Resolución con la ecuación implícita

Llamamos «r» a la recta que pasa por A y B. $\vec{v}_r = (1,-6) \Rightarrow \vec{n}_r = (6,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow r \equiv 6x+y+k = 0$; $A = (22,4) \in r \Rightarrow 6\cdot 22+4+k = 0 \Rightarrow k = -136 \Rightarrow r \equiv 6x+y-136 = 0$

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de «r» y «C»:

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-1)^2=370 \\ 6x+y=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(136-6x-1)^2=370 \\ y=136-6x \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2+(135-6x)^2 = 370 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2-8x+16+18225-1620x+36x^2 = 370 \Rightarrow 37x^2-1628x+17871 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-44x+483 = 0 \Rightarrow x = \frac{44 \pm \sqrt{(-44)^2-4\cdot 1\cdot 483}}{2\cdot 1} = \frac{44\pm 2}{2} = 22\pm 1 = \begin{cases} 23 \\ 21 \end{cases}$$

$x = 23 \Rightarrow y = 136-6\cdot 23 = -2 \rightarrow$ punto $(23,-2)$; $x = 21 \Rightarrow y = 136-6\cdot 21 = 10 \rightarrow$ punto $(21,10)$

Solución: $(21,10)$ y $(23,-2)$