

Vector unitario

Se llama vector unitario al vector que tiene módulo 1.

Propiedad

Si se multiplica la fracción inversa del módulo de un vector por ese vector, se obtiene un vector unitario que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector original. Dicho simbólicamente:

$\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ es un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que \vec{a} .

Bisectriz de un ángulo

El problema geométrico de trazar la bisectriz de un ángulo se traduce en geometría analítica como encontrar la ecuación de la recta bisectriz de un ángulo conociendo las coordenadas del vértice y de un punto de cada semirrecta. Para encontrarla, calcularemos su vector de dirección como la suma de los vectores de dirección unitarios de cada semirrecta.

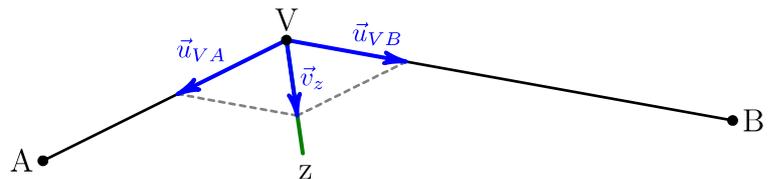
Enunciado

Averigua la ecuación implícita de «z», la recta bisectriz del ángulo AVB.

Datos: A = (-5,1), V = (1,4), B = (12,2).

Resolución

En la figura de la derecha representamos la situación, aunque hemos dibujado los vectores algo mayores de lo que son en realidad para apreciar bien la propiedad.



Llamamos \vec{u}_{VA} al vector unitario en la dirección y sentido de la semirrecta VA.

$$\vec{VA} = (-5-1, 1-4) = (-6, -3); \quad |\vec{VA}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$$

$$\vec{u}_{VA} = \frac{1}{|\vec{u}_{VA}|} \vec{VA} = \frac{1}{3\sqrt{5}} (-6, -3) = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, -1)$$

Llamamos \vec{u}_{VB} al vector unitario en la dirección y sentido de la semirrecta VB.

$$\vec{VB} = (12-1, 2-4) = (11, -2); \quad |\vec{VB}| = \sqrt{11^2 + (-2)^2} = \sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$$

$$\vec{u}_{VB} = \frac{1}{|\vec{u}_{VB}|} \vec{VB} = \frac{1}{5\sqrt{5}} (11, -2)$$

El punto clave de este método es que $\vec{u}_{VA} + \vec{u}_{VB}$ es un vector de dirección de «z». Para obtener el vector de dirección más sencillo posible observamos que si multiplicamos la suma anterior por $5\sqrt{5}$, podremos simplificar todos los radicales. En los casos en que no se puede simplificar y hay que trabajar con radicales, la operación se complica mucho (no lo verás en secundaria).

$$\vec{v}_z = 5\sqrt{5} (\vec{u}_{VA} + \vec{u}_{VB}) = 5\sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (-2, -1) + \frac{1}{5\sqrt{5}} (11, -2) \right) = 5(-2, -1) + (11, -2) = (1, -7)$$

$$\vec{v}_z = (1, -7) \Rightarrow \vec{n}_z = (7, 1) \Rightarrow z \equiv 7x + y + c = 0$$

$$V = (1, 4) \in z \Rightarrow 7 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -11 \Rightarrow z \equiv 7x + y - 11 = 0$$

Solución: $z \equiv 7x + y - 11 = 0$