Recta que pasa por dos puntos

Un paso muy común en geometría es dibujar la recta que pasa por dos puntos. Si traducimos este paso a geometría analítica, debemos preguntarnos cómo obtener alguna ecuación de una recta si conocemos las coordenadas de dos de sus puntos. Según la ecuación que queramos obtener, los pasos serán algo diferentes.

Enunciados

① Averigua la ecuación vectorial de la recta «r» que pasa por los puntos $A=(2,-5)$ y $B=(-6,-1)$.

② Averigua la ecuación implícita de la recta «s» que pasa por los puntos $C=(-2,-1)$ y $D=(-17,19)$.

Resoluciones

① El vector que une los dos puntos conocidos es un vector de dirección: $\overrightarrow{AB}=(-6-2,-1-(-5))=(-8,4)$.

Para que las operaciones sean más sencillas, es conveniente simplificarlo:

$$\vec{v}_r=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}(-8,4)=(2,-1).$$

Conocidos ya un vector de dirección y un punto, podemos escribir la ecuación vectorial, igual que también podríamos escribir las ecuaciones paramétricas o la ecuación continua si nos las pidieran. Como punto podemos elegir cualquiera de los dos que nos han dado en el enunciado.

Solución: $r \equiv (x,y)=(2,-5)+\lambda(2,-1)$

② El vector que une los dos puntos conocidos es un vector de dirección: $\overrightarrow{CD}=(-17-(-2),19-(-1))=(-15,20)$.

Para que las operaciones sean más sencillas, es conveniente simplificarlo:

$$\vec{v}_s=-\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{5}(-15,20)=(3,-4).$$

A partir de un vector de dirección obtenemos un vector normal y parte de la ecuación implícita:

$$\vec{v}_s=(3,-4) \Rightarrow \vec{n}_s=(4,3) \Rightarrow s \equiv 4x+3y+c=0$$

Para calcular «c» sustituimos en la ecuación cualquiera de los dos puntos del enunciado; con ambos se obtiene el mismo valor, así que se suele elegir el que nos parezca más sencillo:

$$C=(-2,-1) \in s \Rightarrow 4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+c=0 \Rightarrow c=11$$

Observa qué ocurre si sustituimos el punto D:

$$D=(-17,19) \in s \Rightarrow 4\cdot(-17)+3\cdot 19+c=0 \Rightarrow -68+57+c=0 \Rightarrow c=11$$

Solución: $s \equiv 4x+3y+11=0$

