Ecuación implícita de la recta y vector normal

Supongamos que una recta tiene ecuación implícita $r \equiv ax+by+c=0$.

Entonces, el vector (a,b) es un vector normal a la recta.

Demostración

Vamos a demostrar que el vector (a,b) es perpendicular a un vector de dirección de la recta «r».

Consideramos dos puntos diferentes de la recta: $P=(p_1,p_2)$ y $Q=(q_1,q_2)$.

$P=(p_1,p_2)\in r \Rightarrow ap_1+bp_2+c=0$; $Q=(q_1,q_2)\in r \Rightarrow aq_1+bq_2+c=0$

Restamos miembro a miembro las dos igualdades:

$(aq_1+bq_2+c)-(ap_1+bp_2+c)=0-0 \Rightarrow a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)+c-c=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)(q_1-p_1,q_2-p_2)=0 \Rightarrow (a,b)\overrightarrow{PQ}=0 \Rightarrow (a,b)\perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow (a,b)\perp \vec{v}_r$

Ejemplo 1

Enunciado: di un vector perpendicular a la recta $s \equiv 10x-14y+5=0$ que sea lo más sencillo que sea posible.

Resolución

Los coeficientes de «x» e «y» en la ecuación implícita ya nos dan un primer vector normal: (10,–14). Pero en algunas ocasiones, como ahora, es posible simplificarlo.

$\vec{n}_s=\frac{1}{2}(10,-14)=(5,-7)$. Solución: $\vec{n}_s=(5,-7)$.

Ejemplo 2

Enunciado: escribe la ecuación implícita de la recta «t» que pasa por el punto $H=(5,-9)$ y tiene vector normal $\vec{n}_t=(4,-1)$.

Resolución

Con el vector normal ya podemos escribir parcialmente la ecuación implícita:

$\vec{n}_t=(4,-1) \Rightarrow t \equiv 4x-y+c=0$

Para averiguar el valor de «c» usamos que el punto H pertenece a la recta y, por lo tanto, debe verificar su ecuación:

$H=(5,-9)\in t \Rightarrow 4\cdot 5-(-9)+c=0 \Rightarrow c=-29$.

Solución: $t \equiv 4x-y-29=0$

Ejemplo 3

Enunciado: escribe la ecuación implícita de la recta «w» que pasa por el punto $R=(3,4)$ y tiene vector de dirección $\vec{v}_w=(2,-5)$.

Resolución

Obtenemos el vector normal de la recta como un vector cualquiera que sea perpendicular al vector de dirección: $\vec{v}_w=(2,-5) \Rightarrow \vec{n}_w=(5,2)$.

Con el vector normal ya podemos escribir parcialmente la ecuación implícita:

$\vec{n}_w=(5,2) \Rightarrow w \equiv 5x+2y+c=0$

Para averiguar el valor de «c» usamos que el punto R pertenece a la recta y por lo tanto, debe verificar su ecuación:

$R=(3,4)\in w \Rightarrow 5\cdot 3+2\cdot 4+c=0 \Rightarrow c=-23$.

Solución: $w \equiv 5x+2y-23=0$

