

Ecuaciones paramétricas de la recta

Supongamos que una recta tiene ecuación vectorial $r \equiv (x,y) = (h_1,h_2) + \lambda(v_1,v_2)$.

Hacemos las operaciones indicadas en el segundo miembro:

$$(x,y) = (h_1,h_2) + \lambda(v_1,v_2) \Rightarrow (x,y) = (h_1 + \lambda v_1, h_2 + \lambda v_2)$$

Como los dos puntos son iguales, sus coordenadas deben ser iguales: $\begin{cases} x = h_1 + \lambda v_1 \\ y = h_2 + \lambda v_2 \end{cases}$

Llamamos **ecuaciones paramétricas** de la recta a estas dos expresiones consideradas conjuntamente: $r \equiv \begin{cases} x = h_1 + \lambda v_1 \\ y = h_2 + \lambda v_2 \end{cases}$

Ejemplo 1

Las ecuaciones paramétricas de la recta «s» que pasa por el punto $W = (8,-4)$ y tiene vector de dirección $\vec{v}_s = (-3,5)$ son: $s \equiv \begin{cases} x = 8 - 3\lambda \\ y = -4 + 5\lambda \end{cases}$

Observa que ahora hemos escrito el parámetro λ tras el número. Es la costumbre.

Ejemplo 2

Enunciado: obtén tres puntos de la recta $t \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases}$ y el vector de dirección.

Resolución

Los números que no llevan parámetro forman las coordenadas de un punto: $(2,1)$.

Los coeficientes del parámetro forman las componentes del vector de dirección: $(4,-3)$.

Para obtener más puntos basta dar dos valores al parámetro λ ; los que queramos, puesto que el enunciado no impone ninguna condición adicional, salvo el valor $\lambda = 0$, porque nos daría otra vez el punto que ya sabemos.

$$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 4 \cdot 1 \\ y = 1 - 3 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{punto } (6,-2)$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 4(-1) \\ y = 1 - 3(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{punto } (-2,2)$$

Solución: Puntos $(2,1)$, $(6,-2)$ y $(-2,2)$, vector de dirección $(4,-3)$.

Ejemplo 3

Enunciado: decide si los puntos $A = (-5,31)$ y $B = (22,-19)$ pertenecen a la recta

$$w \equiv \begin{cases} x = 7 - 3\lambda \\ y = 11 + 5\lambda \end{cases}$$

Resolución

Sustituimos los puntos en las ecuaciones e intentamos calcular λ :

$$A = (-5,31) \Rightarrow \begin{cases} -5 = 7 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = 4 \\ 31 = 11 + 5\lambda \Rightarrow \lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow A \in w$$

$$B = (22,-19) \Rightarrow \begin{cases} 22 = 7 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = -5 \\ -19 = 11 + 5\lambda \Rightarrow \lambda = -6 \end{cases} \Rightarrow \text{sin solución} \Rightarrow B \notin w$$