Ecuación vectorial de la recta

Tomamos una recta llamada r y consideramos estos elementos:

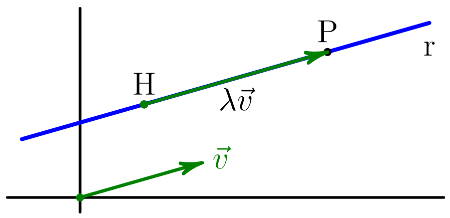
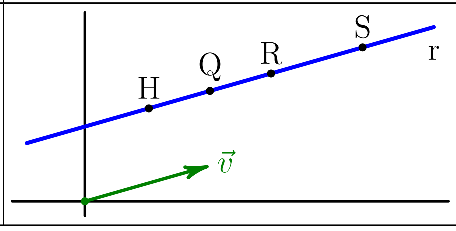
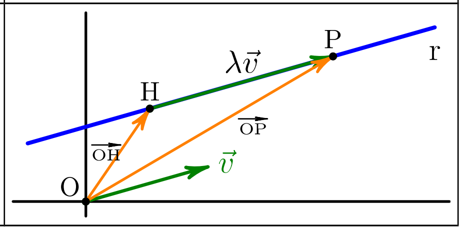
- ✱ El punto $P = (x,y)$ es un punto cualquiera del plano.
- ✱ El punto $H = (h_1,h_2)$ es un punto conocido de la recta.
- ✱ El vector $\vec{v} = (v_1,v_2)$ es un vector de dirección de la recta.
- ✱ Un número real λ, por determinar, que se denomina **parámetro**.

Buscamos una manera de caracterizar a los puntos de la recta, es decir, deducir una expresión que únicamente verifiquen los puntos que pertenezcan a la recta.

Atención ahora, esta es la clave: un punto P del plano pertenece a la recta r solamente cuando existe un número real λ de modo que $P = H+\lambda\,\vec{v}$. **Piénsalo**.

Expresado simbólicamente: $P \in r \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid P = H+\lambda\,\vec{v}$

En la figura 1 vemos la situación general; en la figura 2 mostramos los puntos Q, R y S, obtenidos con los valores λ=0,5, λ=1 y λ=1,75, respectivamente.

Figura 1	Figura 2	Figura 3
		

También podíamos haber expresado la situación como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \lambda\,\vec{v}$, como se muestra en la figura 3. O, incluso, usar que $\overrightarrow{HP} = \lambda\,\vec{v}$.

Si en cualquiera de las tres expresiones que hemos razonado sustituimos los puntos y los vectores por sus coordenadas y componentes, llegaremos a la expresión final. Lo vemos con la primera: $P = H+\lambda\,\vec{v} \Rightarrow (x,y) = (h_1,h_2)+\lambda(v_1,v_2)$

Y ya hemos llegado a la expresión denominada **ecuación vectorial de r**:

$$\boxed{r \equiv (x,y) = (h_1,h_2)+\lambda(v_1,v_2)}$$

Ejemplo 1

La ecuación vectorial de la recta «s» que pasa por el punto $W = (-4,1)$ y tiene vector de dirección $\vec{v}_s = (3,-2)$ es: $s \equiv (x,y) = (-4,1)+\lambda(3,-2)$.

Ejemplo 2

Enunciado: obtén tres puntos de la recta $t \equiv (x,y) = (5,-3)+\lambda(-2,7)$.

Resolución

Basta dar tres valores al parámetro λ; los que queramos, puesto que el enunciado no impone ninguna condición adicional. Por sencillez, suele ser aconsejable usar el valor $\lambda = 0$.

$\lambda = 0 \Rightarrow (x,y) = (5,-3)+0(-2,7) = (5,-3)+(0,0) = (5,-3)$

$\lambda = 1 \Rightarrow (x,y) = (5,-3)+1(-2,7) = (5,-3)+(-2,7) = (3,4)$

$\lambda = -1 \Rightarrow (x,y) = (5,-3)-1(-2,7) = (5,-3)-(-2,7) = (7,-10)$

Solución: (5,–3), (3,4) y (7,–10).

Nota: naturalmente, se pueden hacer las operaciones sin tantos pasos.

