

Fórmula de la probabilidad condicionada

Consideramos un experimento aleatorio, su espacio muestral E , y dos sucesos A y B que verifiquen $p(B) \neq 0$. Buscamos alguna manera general de calcular $p(A|B)$.

Para ello, observamos que cuando se verifica el suceso A sabiendo que se ha verificado el suceso B (situación que es la definición de la probabilidad condicionada), se han verificado simultáneamente los sucesos A y B , luego se ha verificado el suceso $A \cap B$.

A la vista de los ejercicios sobre tablas de contingencia de este curso, te parecerá razonable esta fórmula:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Como en los niveles 3 y 4 del curso siempre resolvemos problemas de cálculo de probabilidades usando la ley de Laplace, y por tanto necesitamos espacios equiprobables, la fórmula anterior es bastante sencilla de entender, como explicaremos ahora. Sin embargo, cuando el espacio muestral no es equiprobable, la situación no es tan sencilla.

Demostración en espacios equiprobables

Para calcular $p(A|B)$ usamos la ley de Laplace tomando como espacio muestral el suceso B , luego podemos hacer este desarrollo:

$$p(A|B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(E)}}{\frac{\text{card}(B)}{\text{card}(E)}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Ejemplo

En una urna hay bolas de color rojo y verde, que pueden ser de madera o de plástico, según la tabla de la derecha. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que sea roja, sabiendo que es de plástico.

	Madera	Plástico	Total
Rojo	1	3	4
Verde	2	4	6
Total	3	7	10

$$p(R|P) = \frac{3}{7}. \text{ Y, por otro lado, } \frac{p(R \cap P)}{p(P)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

Probabilidad de la intersección de dos sucesos

La fórmula de la probabilidad condicionada nos lleva a esta otra fórmula:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B)$$

Observa que en la fórmula anterior los sucesos A y B son intercambiables, de modo que también podemos escribirla así, si nos interesa: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$.

Y, además, cuando los sucesos A y B son independientes:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Estas dos fórmulas se aplican en multitud de problemas. Las verás utilizadas sin ninguna explicación en algunos textos de matemáticas para enseñanza secundaria.