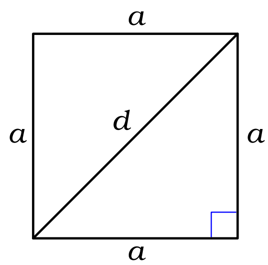
Importancia del uso de radicales

En matemáticas, un radical es una raíz indicada; es decir, no se calcula su valor decimal, sino que se deja el signo de raíz. Naturalmente, si la raíz fuera exacta y sencilla, usaríamos el valor, pero no suele ser el caso.

- ✱ **Ejemplo 1**. Si nos aparece como parte de una operación $\sqrt{9}$, escribiremos 3.
- ✱ **Ejemplo 2**. Si nos aparece como parte de una operación $\sqrt{2}$, es más exacto y más sencillo dejarlo así que sustituirlo por una aproximación decimal.

Hay muchos desarrollos e investigaciones en matemáticas en los que es necesario asegurar **exactamente** el resultado, no es suficiente con tener bien digamos cien cifras significativas (en ingeniería sí puede valer). Y también hay ocasiones en las que es más significativo ver el radical que el valor decimal.

Ejemplo 3



Enunciado: si el lado de un cuadrado mide a, ¿cuál es la longitud de su diagonal?

Llamamos d a la longitud de la diagonal del cuadrado.

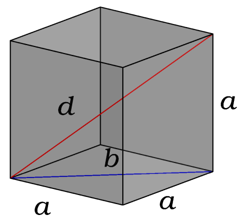
Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{2} \cdot a = a\sqrt{2}$

Observa que hemos llegado a una expresión útil, sencilla, exacta e incluso fácil de recordar: $d = a\sqrt{2}$. Este es el objetivo del trabajo con radicales.

Para llegar a la expresión final hemos pasado por la igualdad $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2}$, que deberemos justificar cuando demostremos que la raíz de un producto es el producto de las raíces. Hay varias propiedades como esta, que deberemos demostrar y que luego podremos utilizar cuando sea necesario para nuestro objetivo.

Ejemplo 4



Enunciado: si el lado de un cubo mide a, ¿cuál es la longitud de su diagonal?

Llamamos d a la longitud de la diagonal del cubo y b a la longitud de la diagonal de la cara. Por el ejemplo anterior sabemos que $b = a\sqrt{2}$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 \cdot 2 = 3a^2 \Rightarrow d = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{3} \cdot a = a\sqrt{3}$

Otra vez llegamos a una expresión interesante: $d = a\sqrt{3}$

Observa que la expresión del ejemplo (3) ha sido muy útil para seguir haciendo operaciones con ella, mucho más que si hubiéramos usado la expresión decimal aproximada de la raíz cuadrada de 2.

Más ejemplos

Los radicales están presentes en muchas expresiones matemáticas, normalmente junto con fracciones.

- ✱ **Ejemplo 5**. Si la longitud del lado de un triángulo equilátero es a, el área del triángulo es $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Te proponemos que lo demuestres tú mismo más adelante.
- ✱ **Ejemplo 6**. Si la longitud del lado de un icosaedro es a, el área del icosaedro es $a^2 \cdot 5\sqrt{3}$. Lo puedes demostrar muy fácilmente usando el ejemplo (5).