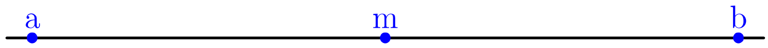
Conjuntos densos

En el nivel 1 vimos que el conjunto de números decimales es denso (entre dos números decimales siempre se puede encontrar otro, y por tanto infinitos), pero ya advertimos de que la situación es aún más rica.

El conjunto de los números racionales es denso

Es fácil demostralo: la media de dos números racionales es otro número racional y está situado entre ellos.

Simbólicamente: $a,b \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ y $a<m<b$



El conjunto de los números irracionales es denso

Esto es más difícil de demostrar, pero se puede imaginar la idea. El caso más difícil es aquel en el que los números irracionales tengan la expresión decimal muy parecida, de modo que comiencen igual. Por ejemplo:

u=5,77788877778888777778888..., v=5,777888877777888888...

Nos fijamos bien en la parte del principio que es común a ambos y en la primera cifra que es diferente:

u=**5,777888**7777888877777788888..., v=**5,777888**877777888888...

Para formar un número irracional que esté entre ellos, comenzamos igual que los dos, repetimos la primera cifra diferente en el menor de los dos, seguimos con una (o más, si es necesario) cifras mayores y a partir de ahí nos inventamos un patrón que nos lleve a un número irracional:

w=**5,777888**78010010001000010000001...

Así obtenemos un número irracional w que verifica $u<w<v$.

Los números racionales e irracionales están entremezclados

Una propiedad muy interesante, usada frecuentemente en demostraciones matemáticas, es hasta qué punto se entremezclan los números racionales e irracionales:

- ✱ Entre cada dos números racionales hay infinitos números irracionales
- ✱ Entre cada dos números irracionales hay infinitos números racionales

El hecho de considerar números con cualquier expresión decimal abre una gran cantidad de posibilidades, como empezamos a ver con estas dos propiedades.

El conjunto de los números reales es denso

Entre dos números reales siempre hay uno, y por tanto infinitos, números reales.

Esta propiedad se demuestra con la media de los dos números reales, igual que hicimos con dos números racionales.

Simbólicamente: $r,s \in \mathbb{R} \Rightarrow t = \frac{r+s}{2} \in \mathbb{R}$ y $r<t<s$