

Operaciones con números racionales e irracionales

Es conveniente que te vayas familiarizando con el uso de números irracionales; para comenzar, vemos algunas propiedades sobre el resultado de operar números racionales e irracionales.

Suma de números racionales e irracionales

- * La suma de dos números racionales es un número racional. (Esto ya lo sabíamos desde que aprendimos a sumar fracciones).
 - **Ejemplo 1:** el número $2,45+5,\overline{23}$ es un número racional.
- * La suma de un número racional y un número irracional es un número irracional. Esto se puede demostrar por reducción al absurdo: llamamos r a un número racional y h a un número irracional. Si $r+h$ fuera racional, entonces $h = (r+h)-r$ también sería racional.
 - **Ejemplo 2:** el número $5+\sqrt{2}$ es un número irracional.
- * La suma de dos números irracionales puede ser un número irracional o un número racional, dependiendo de qué números se sumen.
 - **Ejemplo 3:** el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional (pero no es evidente, habría que demostrarlo).
 - **Ejemplo 4:** el número $\sqrt{2}+(5-\sqrt{2})$ es un número racional (el resultado de la operación es 5).

Producto de números racionales e irracionales

- * El producto de dos números racionales es un número racional. (Esto ya lo sabíamos desde que aprendimos a multiplicar fracciones).
 - **Ejemplo 5:** el número $2,45\cdot 5,\overline{23}$ es un número racional.
- * El producto de un número racional distinto de cero y un número irracional es un número irracional. Esto se puede demostrar por reducción al absurdo: llamamos r a un número racional y h a un número irracional. Si $r\cdot h$ fuera racional, entonces $h = (r\cdot h):r$ también sería racional.
 - **Ejemplo 6:** el número $5\cdot\sqrt{2}$ es un número irracional.
- * El producto de dos números irracionales puede ser un número irracional o un número racional, dependiendo de qué números se multipliquen.
 - **Ejemplo 7:** el número $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ es un número irracional (pero no es evidente, habría que demostrarlo).
 - **Ejemplo 8:** el número $\sqrt{2}\cdot(5:\sqrt{2})$ es un número racional (el resultado de la operación es 5).

Potencia de un número irracional

- * Debería estar claro que la potencia de un número irracional puede ser un número racional (en algunos casos).
 - **Ejemplo 9:** el número $(\sqrt{2})^2$ es un número racional (el resultado de la operación es 2, según se sigue de la definición de raíz cuadrada).
- * Incluso un número irracional elevado a un número irracional (una operación que aún no hemos definido) puede dar como resultado un número racional.
 - **Ejemplo 10.** Este ejemplo requiere aplicar un teorema que no se estudia en la enseñanza secundaria: el número $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ es irracional (teorema de Gelfond-Schneider) y $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ es 2! (¿por qué crees que es así?).