Números irracionales

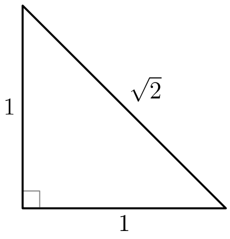
En el nivel 2 vimos la definición de número racional y a partir de ella la de número irracional. Usando esa definición, vimos que podíamos construir fácilmente números irracionales; por ejemplo, estos números son irracionales:

Ejemplo 1: 0,101001000100001...	Ejemplo 2: 0,212112111211112...
Ejemplo 3: 0,1011001110001111...	Ejemplo 4: 0,2522552225552222...

También señalamos que hay algunos números importantes, como el número π, que son irracionales. Ahora es el momento de **demostrar** que hay números muy importantes y utilizados que son irracionales.

La raíz cuadrada de 2

La raíz cuadrada de 2 es un número que les planteó muchos problemas a varios de los mejores matemáticos de la Grecia clásica, como a Pitágoras, porque algunos de ellos pensaban, por una necesidad filosófica de belleza universal, que cualquier número se podía expresar como cociente de dos números enteros. A la derecha puedes ver que si los catetos de un triángulo rectángulo miden la unidad (cualquier unidad), la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ unidades.



La raíz cuadrada de 2 es un número irracional

Vamos a hacer la demostración por reducción al absurdo: supondremos que la raíz cuadrada de 2 es un número racional y llegaremos a una contradicción.

Antes de empezar, nos fijamos en esta propiedad: en la descomposición factorial en factores primos del cuadrado de un número natural, todos los exponentes son pares. Para demostrarlo, basta aplicar las propiedades de las potencias. Por ejemplo: $n = 2250 = 2{\cdot}3^2{\cdot}5^3 \Rightarrow n^2 = (2{\cdot}3^2{\cdot}5^3)^2 = 2^2{\cdot}3^4{\cdot}5^6$

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, será posible escribirlo como el cociente de dos números naturales: $\sqrt{2} = a{:}b$. Elevando al cuadrado:

$(\sqrt{2})^2 = (a{:}b)^2 \Rightarrow 2 = a^2{:}b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Llamamos $c = a^2 = 2b^2$. La contradicción se deduce de estas dos afirmaciones:

- Como $c = a^2$, en la descomposición factorial de c el exponente de 2 es un número par (que podría ser cero).
- Como $c = 2b^2$, en la descomposición factorial de c el exponente de 2 es un número impar (al menos es 1).

Generalización de la demostración

La demostración anterior tiene una gran ventaja sobre otras demostraciones: es muy fácil adaptarla a otros casos e incluso generalizarla. Como ejemplo, te damos las pistas para demostrar que $\sqrt[3]{49}$ es un número irracional:

- En la descomposición factorial del cubo de un número natural, todos los exponentes son múltiplos de 3.
- $\sqrt[3]{49} = a{:}b \Rightarrow (\sqrt[3]{49})^3 = (a{:}b)^3 \Rightarrow 7^2 = a^3{:}b^3 \Rightarrow a^3 = 7^2{\cdot}b^3$; $c = a^3 = 7^2{\cdot}b^3$
- Como $c = a^3$, en la descomposición factorial de c el exponente de 7 es un múltiplo de 3 (que podría ser cero).
- Como $c = 7^2{\cdot}b^3$, en la descomposición factorial de c el exponente de 7 no es un múltiplo de 3 (al menos es 2).

