Ecuación logarítmica

Llamamos ecuación logarítmica a una ecuación en la intervienen los logaritmos de las incógnitas o estas forman parte de la base de algún logarítmo.

Ejemplos

$\log_x 117649 = 6$	$\log x^2 - 2\cdot\log 5 = \log 2 + \log x$	$\log(8x^2) - \log 5 = 1 + \log(4x)$

Métodos de resolución

Hay dos métodos fundamentales de resolución:

- ✱ Dejar un solo logaritmo en un miembro, un número en el otro miembro y aplicar la definición de logaritmo; es decir, deducir:

$$\boxed{\log_a r = s \Rightarrow a^s = r}$$

- ✱ Dejar un solo logaritmo en cada miembro, que sean los dos de la misma base, y aplicar que la función logarítmica es inyectiva para deducir que las expresiones afectadas por los logaritmos deben ser las mismas; es decir, deducir:

$$\boxed{\log_a r = \log_a s \Rightarrow r = s}$$

A continuación, se resuelve la ecuación resultante, que ya no tendrá logarítmos. Pero es imprescindible comprobar, para cada solución de la ecuación resultante, si es aplicable como solución de la ecuación original, porque solo tienen logaritmo los números positivos y solo estos pueden ser base de un logaritmo. Es decir, si alguna solución de la ecuación resultante da lugar a una expresión que no existe, hay que desecharla. Puede ocurrir incluso que no sea válida ninguna.

Reunión de varios logaritmos en uno solo

En cualquiera de los dos métodos fundamentales suele ser necesario reunir en un solo logaritmo una expresión que tiene varios logaritmos. Esto se consigue aplicando las propiedades de los logaritmos, pero en el sentido inverso de como los hemos aplicado hasta ahora. Concretamente, lo haremos en este sentido:

① Una suma de logaritmos es igual al logaritmo de un producto:

$\log_a r + \log_a s = \log_a(rs)$. Ejemplo 1: $\log 2 + \log x = \log(2x)$

② Una diferencia de logaritmos es igual al logaritmo de un cociente:

$\log_a r - \log_a s = \log_a(r:s)$. Ejemplo 2: $\log x - \log 5 = \log(x:5)$

③ Un número por un logaritmo es igual al logaritmo de una potencia:

$n\cdot\log_a r = \log_a(r^n)$. Ejemplo 3: $3\cdot\log x = \log(x^3)$

④ Un logaritmo entre un número es igual al logaritmo de una raíz:

$\dfrac{\log_a r}{n} = \log_a \sqrt[n]{r}$. Ejemplo 4: $\dfrac{\log x}{4} = \log \sqrt[4]{x}$

⑤ Además, cualquier número se puede escribir como un logaritmo:

$r = \log_a a^r$. Ejemplo 5: $5 = \log_3 3^5$. Ejemplo 6: $2 = \log 100$