Propiedades elementales de los logartimos

Los logaritmos tienen varias propiedades elementales, que se demuestran fácilmente usando la propia definición de logaritmo.

Solo tienen logaritmo los números reales positivos

- Si un número real es positivo, tiene logaritmo en cualquier base válida.
- Si un número real es negativo o nulo, no tiene logaritmo en ninguna base.

Demostramos por reducción al absurdo la segunda afirmación:

Supongamos que «a» es la base de logaritmos y «r» es un número real negativo o nulo. Si existiera el $\log_a r$, debería ser un número real que podemos llamar «x».

Entonces $\log_a r = x \Rightarrow a^x = r$ y hemos llegado a la contradicción de que $a^x \leqslant 0$, cuando sabemos que siempre debe ocurrir $a^x > 0$ porque es una propiedad de la función exponencial.

- **Ejemplo 1**. Si intentamos calcular $\log(-1)$ con la calculadora, obtenemos un error: `log` `(-)` `1` `=` ⇰ Error
- **Ejemplo 2**. Si intentamos calcular $\ln 0$ con la calculadora, obtenemos un error: `ln` `0` `=` ⇰ Error

El logaritmo de 1 es 0

Si «a» es la base de logaritmos, siempre se verifica $\log_a 1 = 0$

Demostración: $\log_a 1 = x \Rightarrow a^x = 1 \Rightarrow a^x = a^0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \log_a 1 = 0$

- **Ejemplo 3**. Calculamos $\ln 1$ con la calculadora: `ln` `1` `=` ⇰ 0

El logaritmo de la base es 1

Si «a» es la base de logaritmos, siempre se verifica $\log_a a = 1$

Demostración: $\log_a a = x \Rightarrow a^x = a \Rightarrow a^x = a^1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \log_a a = 1$

- **Ejemplo 4**. Calculamos $\log 10$ con la calculadora: `log` `1` `0` `=` ⇰ 1

El logaritmo en base «a» de a^x es «x»

Expresado con símbolos: $\log_a a^x = x$

Demostración. Como queremos calcular el $\log_a a^x$, usando la definición de logaritmo nos estamos preguntando: ¿a qué número hay que elevar «a» para obtener «a^x»? Visto así, la respuesta es evidente y obvia: a «x».

- **Ejemplo 5**. $\log_7 7^{45} = 45$

«a» elevado al logaritmo en base «a» de «x» es «x»

Expresado con símbolos: $a^{\log_a x} = x$

Demostración. Como el $\log_a x$, es el número al que hay que elevar «a» para que el resultado sea «x», está claro que cuando elevamos «a» ese número, debemos obtener «x», esa es la propia definición.

- **Ejemplo 6**. $7^{\log_7 45} = 45$

Resumen

$\log_a(-1)$ no existe	$\log_a 0$ no existe	$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_a a^x = x$	$a^{\log_a x} = x$

