Resolución general de ecuaciones exponenciales

Cuando una ecuación exponencial no es simple, es decir, cuando tiene tres o más términos, se puede intentar resolver usando un cambio de variable.

Normalmente se elige como variable auxiliar la potencia que tenga incógnita en el exponente y como base el número menor. Una vez resuelta la ecuación obtenida tras el cambio de variable, habrá que resolver las ecuaciones exponenciales simples resultantes.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la ecuación $4^x+5\cdot 2^{x+1}=144$

Resolución

Hay dos potencias con incógnita en el exponente: 4^x y 2^{x+1}. Como la menor base es 2, lo más sencillo será llamar $z=2^x$. (Podríamos usar cualquier otra letra para nombrar la incógnita auxiliar.) Para poder convertir la ecuación dada en una ecuación en la que z sea la única incógnita serán necesarias dos trasformaciones, ambas muy habituales:

Por un lado, 2^{x+1} hay que descomponerlo usando las propiedades de las potencias para que podamos separar z: $2^{x+1}=2^x\cdot 2=z\cdot 2=2z$.

Por otro lado, hay que escribir 4^x en función de z, también usando las propiedades de las potencias. Esta trasformación es importante y tendrás que hacerla muchas veces con estas ecuaciones. Se basa en que $4=2^2$. Atención:

$$4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2=z^2$$

Ya estamos preparados para realizar el cambio de variable:

Llamando $z=2^x$, $4^x+5\cdot 2^{x+1}=144 \Rightarrow z^2+5\cdot 2z=144$.

Ahora debemos resolver la ecuación obtenida. En este ejemplo, la ecuación es de segundo grado, pero en general podríamos enfrentarnos a cualquier otro tipo de ecuación.

$$z^2+5\cdot 2z=144 \Rightarrow z^2+10z-144=0 \Rightarrow z=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 1\cdot(-144)}}{2\cdot 1}=\frac{-10\pm\sqrt{676}}{2}=$$

$$=\frac{-10\pm 26}{2}=\begin{cases}-18\\ 8\end{cases}$$

Como hemos obtenido dos soluciones para la z, tendremos que resolver dos ecuaciones exponenciales simples, una para cada valor. Pero en general podríamos obtener cualquier número de soluciones para la z y por tanto cualquier número de ecuaciones exponenciales simples.

Las resolvemos: $z=-18 \Rightarrow 2^x=-18 \rightarrow$ sin solución; $z=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow 2^x=2^3 \Rightarrow x=3$

También en general, las ecuaciones exponenciales simples podrán tener solución o no tenerla, con cualquier distribución.

Solución: $x=3$

