Diferentes definiciones de función exponencial

La expresión analítica de la función exponencial es $y = a^x$. Bajo su aparente sencillez (es una potencia), encierra varias dificultades que se han ido solventando a lo largo de este curso, en diferentes niveles.

Función entera de variable natural

En el nivel 1 vimos esta definición:

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = a^x$, siendo «a» un número entero.

$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x \text{ factores}}$. Ejemplo 1: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Ejemplo 2: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Función racional de variable entera

En el nivel 2 vimos esta definición:

f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida como $f(x) = a^x$, siendo «a» un número racional.

$$a^x = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x \text{ factores}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{a^{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$. Ejemplo 4: $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

Ejemplo 5: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \dfrac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}$

Función real de variable racional

En el nivel 4 vimos esta definición:

f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = a^x$, siendo «a» un número real no negativo.

Escribimos x como una fracción $\frac{m}{n}$, con n un número natural. $a^x = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo 6: $1{,}55^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1{,}55^2} = 1{,}339330623\ldots$

Función real de variable real

Ahora es necesario definir f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = a^x$, para lo que hay que dar un sentido a utilizar un número real como exponente de una potencia. Por ejemplo, ¿qué quiere decir $2^{\sqrt{3}}$? Si lo calculas con una calculadora, verás que hay una respuesta (3,321997085...), pero... ¿de dónde sale? Por desgracia, esto no se explica en la enseñanza secundaria por considerarse demasiado difícil, pero sí podemos acercarte a la idea fundamental:

El número $\sqrt{3}$ se puede aproximar mediante una serie de números racionales, tomando cada vez un decimal más de su expresión decimal $\sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$

Usamos los números racionales 1,7; 1,73; 1,732; etc. y calculamos 2 elevado a esos números: $2^{1,7} = 3{,}249\ldots$; $2^{1,73} = 3{,}317\ldots$; $2^{1,732} = 3{,}3219\ldots$ y vemos que los resultados están definiendo un número real, que será el resultado. Es decir, conforme nos vamos aproximando a $\sqrt{3}$, los resultados de las potencias nos están aproximando a $2^{\sqrt{3}}$.

Este método utilizado para poder establecer una definición tiene muchas ventajas: por un lado, se conservan todas las propiedades de las potencias y por otro lado la función real de variable real $y = a^x$ es una función continua, que es una propiedad fundamental para el análisis matemático.

