## Expresiones cuadráticas en funciones definidas a trozos

Cuando alguna de las expresiones analíticas de una función definida a trozos es una función cuadrática, su representación gráfica exige un estudio adicional al cálculo de los valores de la función en los extremos de definición. Es necesario, además, calcular los aspectos fundamentales de la función cuadrática (orientación, puntos de corte con los ejes y coordenadas del vértice), aunque pueda ocurrir que esa información al final no se refleje que la representación; por ejemplo, el vértice de la función cuadrática puede estar fuera del intervalo de definición.

### Ejemplo

Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x\in[-3,-1] \\ x^2-2x & \text{si} \quad x\in(-1,2) \\ 1 & \text{si} \quad x\in[2,\rightarrow) \end{cases}$

### Resolución

En esta función definida a trozos se utilizan tres expresiones analíticas diferentes, que vamos a distinguir con subíndices para facilitar la explicación:

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = -x-1$ | $f_2(x) = x^2-2x$ | $f_3(x) = 1$ |

En el intervalo $[-3,-1]$ la función es lineal, así que basta con calcular los valores en los extremos y unirlos en línea recta:

$f(-3) = f_1(-3) = 2 \rightarrow$ punto $(-3,2)$; $f(-1) = f_1(-1) = 0 \rightarrow$ punto $(-1,0)$

En el intervalo $(-1,2)$ la función es cuadrática. Calculamos los valores en los extremos del intervalo de definición (aunque no pertenezcan a la gráfica):

$f_2(-1) = 3 \rightarrow$ punto $(-1,3)$; $f_2(2) = 0 \rightarrow$ punto $(2,0)$

Continuamos con la orientación de la función: como el coeficiente de $x^2$ es positivo, el vértice en un mínimo.

Averiguamos los puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \Rightarrow y = f(0) = f_2(0) = 0 \rightarrow$ punto $(0,0)$

$y = 0 \Rightarrow x^2-2x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \rightarrow$ puntos $(0,0)$ y $(2,0)$, que ya conocíamos.

Terminamos calculando el vértice $V = (v_x,v_y)$

$v_x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1$; $v_y = f(1) = f_2(1) = -1 \rightarrow V = (1,-1)$

En el intervalo $[2,\rightarrow)$ la función es constante: $f_3(x) = 1$. Utilizaremos el punto $(2,1)$ como comienzo de su representación.

Solución: