Funciones definidas a trozos

Llamamos de esta manera a aquellas funciones que requieren más de una expresión analítica en su definición. Hay que aplicar una u otra de las distintas expresiones analíticas según el valor que tome la variable independiente.

Ejemplo

Se define la función real de variable real f: ℝ → ℝ del siguiente modo:

(Las dos definiciones que escribimos a continuación son completamente equivalentes; podrás ver en distintos textos cualquiera de los dos modos de expresión.)

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\in(-3,-1) \\ -x+1 & \text{si} \quad x\in(-1,2] \\ x-1 & \text{si} \quad x\in(2,\rightarrow) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -3<x<-1 \\ -x+1 & \text{si} \quad -1<x\leqslant 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

En esta función definida a trozos se utilizan tres expresiones analíticas diferentes, que vamos a distinguir con subíndices para facilitar la explicación:

$f_1(x) = x+2$	$f_2(x) = -x+1$	$f_3(x) = x-1$

Para averiguar el valor de f(x) primero hay que fijarse bien en cuál de las tres condiciones verifica «x». Puede no verificar ninguna, y en ese caso ese valor de «x» no pertenecerá al dominio de la función y f(x) no existirá. Pero no puede verificar más de una, porque en ese caso «f» no sería una función.

Vamos a detallar cómo se calculan algunos valores de f(x). Para trabajar con estas funciones has de prestar especial atención a los valores de «x» en los que cambia la expresión analítica que hay que aplicar, que podemos llamar «valores fontera». En este ejemplo, son los valores $x = -1$ y $x = 2$.

$x = -4$. Como -4 no cumple ninguna de las condiciones, $-4\notin D(f)$.

$x = -3$. Como -3 no cumple ninguna de las condiciones, $-3\notin D(f)$.

$x = -2{,}99$. Como $-2{,}99\in(-3,-1)$, $f(-2{,}99) = f_1(-2{,}99) = -2{,}99+2 = -0{,}99$

$x = -2$. Como $-2\in(-3,-1)$, $f(-2) = f_1(-2) = -2+2 = 0$

$x = -1{,}01$. Como $-1{,}01\in(-3,-1)$, $f(-1{,}01) = f_1(-2) = -1{,}01+2 = 0{,}99$

$x = -1$. Como -1 no cumple ninguna de las condiciones, $-1\notin D(f)$.

$x = -0{,}99$. Como $-0{,}99\in(-1,2]$, $f(-0{,}99) = f_2(-0{,}99) = -(-0{,}99)+1= 1{,}99$

$x = 0$. Como $0\in(-1,2]$, $f(0) = f_2(0) = -0+1= 1$

$x = 1$. Como $1\in(-1,2]$, $f(1) = f_2(1) = -1+1= 0$

$x = 2$. Como $2\in(-1,2]$, $f(2) = f_2(2) = -2+1= -1$

$x = 2{,}01$. Como $2{,}01\in(2,\rightarrow)$, $f(2{,}01) = f_3(2{,}01) = 2{,}01-1 = 1{,}01$

$x = 3$. Como $3\in(2,\rightarrow)$, $f(3) = f_3(3) = 3-1 = 2$

$x = 4$. Como $4\in(2,\rightarrow)$, $f(4) = f_3(4) = 4-1 = 3$

Podemos resumir nuestros cálculos en esta tabla de valores (el símbolo ∄ significa «no existe»):

x	–4	–3	–2,99	–2	–1,01	–1	–0,99	0	1	2	2,01	3	4
f(x)	∄	∄	–0,99	0	0,99	∄	1,99	1	0	–1	1,01	2	3

