Inecuaciones racionales

Llamamos así a una inecuación en la que aparece alguna fracción algebraica. En el nivel 6 veremos un método simple para resolverlas, que se basa en propiedades que aún no hemos estudiado. Pero ahora, usando lo que sabemos hasta el momento, también podemos resolverlas sin dificultad, aunque el método sea más largo.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la inecuación $\dfrac{x+3}{1-x} \geqslant 0$

Resolución

Podría parecer que es posible aplicar el método que usamos para resolver una ecuación con incógnita en el denominador, esto es:

Error ⇛ $\dfrac{x+3}{1-x} \geqslant 0 \Rightarrow x+3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -3$

El problema con esta resolución es que perdemos toda la información sobre el signo del polinomio «1–x», cuando el enunciado está pidiendo que una fracción algebraica tenga un signo concreto.

El método correcto de resolución consiste en considerar que una fracción puede ser positiva en dos casos distintos: que el numerador y el denominador sean simultáneamente positivos o simultáneamente negativos.

Además, en este caso, hay que tener en cuenta que el numerador puede ser cero (la fracción valdría 0), pero el denominador no puede serlo (la fracción no existiría).

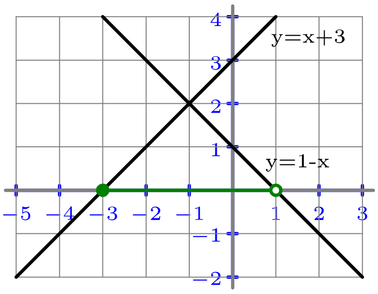
Por tanto, hay que resolver dos sistemas de inecuaciones y calcular la unión de sus soluciones. A la derecha vemos la interpretación geométrica:

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3, \rightarrow) \\ x \in (\leftarrow, 1) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3,\rightarrow) \cap (\leftarrow,1) = [-3,1)$$

$$\begin{cases} x+3 \leqslant 0 \\ 1-x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -3 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (\leftarrow, -3] \\ x \in (1, \rightarrow) \end{cases} \Rightarrow x \in (\leftarrow,-3) \cap (1,\rightarrow) = \varnothing$$

$[-3,1) \cup \varnothing = [-3,1)$

Solución: $x \in [-3,1)$



Enunciados

Resuelve las siguientes inecuaciones.

① $\dfrac{x-4}{1-x} > 0$

② $\dfrac{x^2-3x}{2-2x} \geqslant 0$

③ $\dfrac{x^2+2x-3}{-x^2+3x+4} \leqslant 0$

④ $\dfrac{x^2+x+1}{-x^2+4x-5} > 0$

⑤ $\dfrac{3x-2}{x+2} \geqslant 1$

Soluciones

① $x \in (1,4)$

② $x \in (\leftarrow,0) \cup (1,3]$

③ $x \in (\leftarrow,-3) \cup (-1,1] \cup (4,\rightarrow)$

④ Sin solución

⑤ $x \in (\leftarrow,-2) \cup [2,\rightarrow)$