

## Ecuaciones con incógnita en una raíz cuadrada

Como estás viendo en este tema, las ecuaciones más complicadas se resuelven convirtiéndolas en ecuaciones más sencillas, que ya sepamos resolver; por este motivo, casi siempre acaba apareciendo como último paso una ecuación polinómica.

La manera de eliminar una raíz cuadrada es elevándola al cuadrado. Este procedimiento es correcto porque si dos números son iguales, sus cuadrados lo son también; es decir:  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ .

Pero si dos números tienen el mismo cuadrado, los números pueden ser iguales u opuestos; por ejemplo:  $7^2 = (-7)^2$  pero  $7 \neq -7$ , 7 y  $-7$  son opuestos.

Por este motivo, cuando elevamos al cuadrado los dos términos de una ecuación para eliminar alguna raíz cuadrada, puede ocurrir que la nueva ecuación tenga soluciones que no lo son de la original, que luego habrá que depurar. Un ejemplo muy sencillo para que veas la complicación es este:

**Ejemplo 1.** Enunciado: resuelve la ecuación  $x = 1$ .

Obviamente, la única solución es  $x = 1$ . Pero si elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación y resolvemos la ecuación resultante, nos aparece una solución nueva:  $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

## Método para resolver estas ecuaciones

Aunque cada ecuación puede requerir pasos algo diferentes, conviene tener en cuenta las ideas principales:

**Paso 1.** Se eliminan todas las raíces cuadradas que incluyan a la incógnita elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación. Para facilitar la operación, suele ser necesario aislar en un miembro la raíz cuadrada antes de elevar al cuadrado los dos miembros.

**Paso 2.** Resolvemos la ecuación resultante.

**Paso 3.** Para cada una de las soluciones obtenidas en el paso 2, comprobamos su corrección sustituyéndola en la ecuación original y comprobando que se verifica la igualdad.

## Ejemplo 2

**Enunciado:** resuelve la ecuación  $x = 20 + \sqrt{x}$

### Resolución

Si eleváramos al cuadrado los dos miembros, no eliminaríamos la raíz cuadrada:

$$x = 20 + \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = (20 + \sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 = 400 + 40\sqrt{x} + x$$

De hecho, llegaríamos a una ecuación más complicada que la original.

Por ese motivo, es mejor aislar la raíz cuadrada en un miembro antes de elevar al cuadrado los dos miembros:

$$\begin{aligned} x = 20 + \sqrt{x} &\Rightarrow x - 20 = \sqrt{x} \Rightarrow (x - 20)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x + 20^2 = x \Rightarrow x^2 - 40x + 400 = x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0 \Rightarrow x = \frac{41 \pm \sqrt{(-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400}}{2 \cdot 1} = \frac{41 \pm 9}{2} = \begin{cases} 25 \\ 16 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos la corrección de la solución 25:  $25 = 20 + \sqrt{25}$  ✓ es correcta

Comprobamos la corrección de la solución 16:  $16 = 20 + \sqrt{16}$  ✗ no es correcta

Solución:  $x = 25$