Ecuaciones con incógnita en el denominador

Sabemos que en matemáticas no existe la división entre 0. Por ese motivo, cuando se resuelve una ecuación que tiene alguna incógnita en el denominador, siempre hay que comprobar que ningún denominador se anula para cada posible solución obtenida; eso se llama comprobar la **validez** de la posible solución, que es algo diferente a comprobar la **corrección** de una solución.

Para resolver ecuaciones con incógnita en el denominador seguiremos estos pasos:

Paso 1. Calculamos el polinomio mínimo común múltiplo de los denominadores.

Paso 2. Eliminamos todos los denominadores de la ecuación multiplicando todos sus términos por el polinomio mínimo común múltiplo calculado en el paso 1.

Paso 3. Resolvemos la ecuación resultante.

Paso 4. Para cada una de las soluciones obtenidas en el paso 3, estudiamos su validez comprobando que ningún denominador se anule para ella.

Paso 5. Damos como solución de la ecuación original solamente las que han pasado el filtro del paso 4.

Paso 6. Si deseamos comprobar la corrección de las soluciones obtenidas en el paso 5, podemos sustituir cada una de ellas en la ecuación original y comprobar que se verifica la igualdad.

Ejemplo

Enunciado: resuelve la ecuación $\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x-3}=\frac{5}{(x-3)(x-2)}+1$

Resolución

El polinomio mínimo común múltiplo de los denominadores es (x–2)(x–3).

Multiplicamos por él todos términos de la ecuación:

$$\frac{2(x-2)(x-3)}{x-2}+\frac{5(x-2)(x-3)}{x-3}=\frac{5(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-2)}+1(x-2)(x-3)$$

Simplificamos (podíamos haber multiplicado y simplificado en un solo paso):

$$2(x-3)+5(x-2) = 5+(x-2)(x-3)$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2(x-3)+5(x-2) = 5+(x-2)(x-3) \Rightarrow 2x-6+5x-10 = 5+x^2-3x-2x+6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-12x+27=0 \Rightarrow x = \frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 1\cdot 27}}{2\cdot 1} = \frac{12\pm 6}{2} = 6\pm 3 = \begin{cases}9\\3\end{cases}$$

Comprobamos la **validez** de las soluciones obtenidas:

x = 9 es una solución válida porque **9**–2 ≠ 0, **9**–3 ≠ 0 y (**9**–2)(**9**–3) ≠ 0

x = 3 no es una solución válida porque **3**–3 = 0 (se anula un denominador).

Solución: x = 9

Ahora, si lo consideramos oportuno, podemos comprobar la **corrección** de la solución obtenida:

$\frac{2}{\mathbf{9}-2}+\frac{5}{\mathbf{9}-3}=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}$ y $\frac{5}{(\mathbf{9}-3)(\mathbf{9}-2)}+1=\frac{5}{42}+1=\frac{47}{42}$, luego, efectivamente, es una solución correcta.

