Parte de una esfera vista desde el exterior

Cuando miramos un objeto esférico opaco, como puede ser una pelota, un planeta, o una estrella, solo vemos una parte de su superficie. Si miramos desde muy cerca, veremos una parte muy pequeña, que es lo que nos pasa cuando miramos la Tierra desde el suelo; imagínate que en un barco en alta mar se pones de pie y miras hasta el horizonte: verás una parte muy pequeña de la Tierra. Sin embargo, si miramos desde una distancia significativamente mayor veremos casi la mitad; es lo que nos ocurre cuando miramos la luna llena desde la Tierra.

Por tanto, tiene perfecto sentido preguntarnos por el porcentaje de superficie de una esfera que vemos cuando miramos desde cierta distancia. En el siguiente problema te damos las claves para averiguarlo.

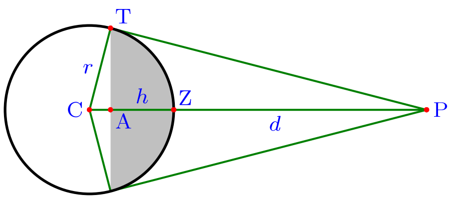
Problema

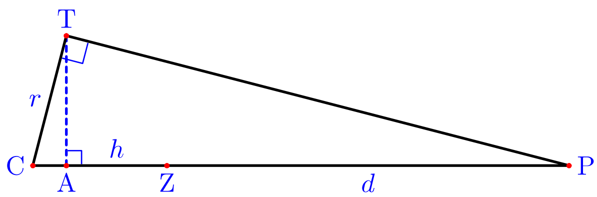
Calcula el porcentaje de superficie de una esfera que vemos si la observamos desde una distancia que sea el triple de la longitud del radio.

Resolución

La parte que vemos de la esfera es un casquete esférico. Para calcular su área (y poder compararla con la de la esfera) es necesario calcular su altura, pero como el enunciado no dice cuánto mide el radio, habrá que calcular la altura del casquete en función del radio de la esfera.

Llamamos h a la longitud de la altura del casquete esférico y r a la longitud del radio de la esfera; la distancia entre el punto en que miramos y la superficie de la esfera será $d=3r$. La siguiente imagen nos muestra la situación vista en dos dimensiones (para mayor claridad): P es el punto desde el que miramos la esfera, Z es el punto de la esfera más cercano a nosotros, la parte en gris representa el casquete esférico que realmente vemos, C es el centro de la esfera, T es uno de los puntos de tangencia entre la esfera y nuestra mirada y A es el centro de la base del casquete esférico. Observa que $\overline{\text{CZ}} = r$.





El triángulo CTP es un triángulo rectángulo por ser T un punto de tangencia.

- ✱ El cateto CT mide $\overline{\text{CT}} = r$
- ✱ La hipotenusa mide $\overline{\text{CP}} = \overline{\text{CZ}}+\overline{\text{ZP}} = r+d = r+3r = 4r$
- ✱ La proyección del cateto CT sobre la hipotenusa mide $\overline{\text{CA}} = \overline{\text{CZ}}-\overline{\text{AZ}} = r-h$

Aplicamos en el triángulo CTP el teorema del cateto para CT:

$$\overline{\text{CT}}^2 = \overline{\text{CP}}\cdot\overline{\text{CA}} \Rightarrow r^2=4r\cdot(r-h) \Rightarrow r=4(r-h) \Rightarrow r = 4r-4h \Rightarrow 4h = 3r \Rightarrow h = \frac{3}{4}\cdot r$$

$$\text{Porcentaje} = \frac{\text{Área del casquete}}{\text{Área de la esfera}} = \frac{2\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{3}{4}\cdot r}{4\cdot\pi\cdot r^2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$$

Solución: 37,5 %

 Licencia: CC0 1.0 Universal